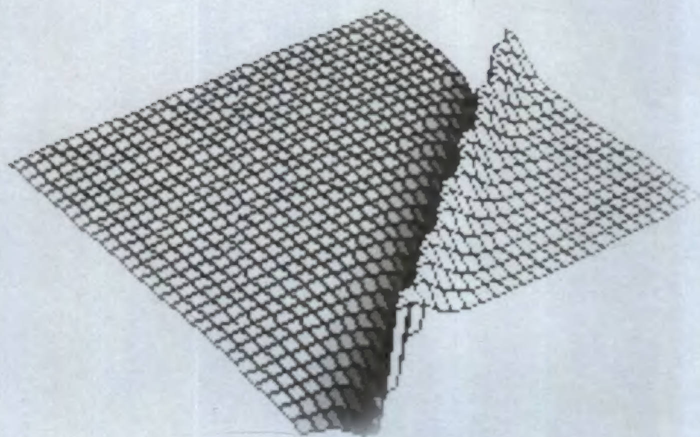
# 孤立子理论与可积系统

董焕河　张玉峰　著







中国科学技术出版社




ISBN 7-5046-4409-9
O · 114　定价:31.00元

# 孤立子理论与可积系统

董焕河　　张玉峰　　著

中国科学技术出版社
·北　京·

**图书在版编目(CIP)数据**

孤立子理论与可积系统/董焕河,张玉峰著.—北京:中国科学技术出版社,2006.7

ISBN 7-5046-4409-9

Ⅰ.孤…　Ⅱ.①董…　②张…　Ⅲ.孤立子-研究　Ⅳ.0572.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 071928 号



中国科学技术出版社出版

北京市海淀区中关村南大街 16 号　邮政编码:100081

电话:010-62103210　传真:010-62183872

http//www.kipbooks.com.cn

科学普及出版社发行部发行

北京长宁印刷有限公司印刷

*

开本:850 毫米×1168 毫米　1/32　印张:9　字数:200 千字

2006 年 7 月第 1 版　2006 年 7 月第 1 次印刷

印数:1-500 册　　定价:31.00 元

---

# 内容简介

本书介绍了作者近年来在孤立子和可积系统方面的部分研究成果. 全书共分六章, 第一章介绍了孤立子理论的产生、发展以及研究概述; 第二章介绍了 C-D 可积系统及其应用; 第三章介绍了 Backlund 变换及其有关问题; 第四章介绍了非线性发展方程的相似约化; 第五章介绍了非线性演化方程族的生成及其可积系; 第六章介绍了孤立子系统的 Hamilton 结构. 本书附录部分, 我们提供了 100 多个常见的偏微分方程, 以供读者参考. 本书可以作为数学或物理专业的高年级大学生和研究生教材, 也可供专业研究人员参考使用.

# 前　言

非线性问题在数学和力学中早已存在, 从前人们只能对具体问题采取特殊的技巧或算法个别地解决, 没有认识到它们之间的内在联系, 不能用解析方法一般地处理.20 世纪 60 年代以后, 随着非线性现象的深入研究, 人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的反散射方法, 这就启发人们去寻找各门自然科学的非线性现象的共性及其定量的研究方法, 从而建立一门新的交叉学科 —— 非线性科学.

科学家迄今已经发现, 非线性现象的三大普适类: 混沌 (chaos)、孤立子 (soliton)、分形 (fractal), 并且在此基础上建立非线性科学的三大理论. 同时, 非线性科学揭示了更普遍的、既确定又随机的混沌现象及其特有的规律性 (有的科学家称为"混沌序"或"分形序", 本文称之为非线性规律), 以及确定性现象、随机现象、混沌现象的转化关系.

因此, 有的科学家认为, 混沌学的创立是 20 世纪物理学的第三次革命; 分形几何是继微积分以来的又一次革命; 孤立子理论预示着物理学与数学的统一. 正因为非线性科学具有革命性意义, 所以, 它一出现就引起学术界的重视, 现在对非线性科学的研究方兴未艾.

自 20 世纪 60 年代以来, 孤立子理论与非线性可积系统的研究一直受到中外科学家的充分重视. 孤立子理论及非线性可积系统不仅被迅速应用于物理学中的场论、流体力学、非线性光学等分支, 而且也被迅速应用于生物、化学、材料、天体、通信等自然科学的各个领域. 到目前为止, 人们已发现许多的 (1+1) 维和 (2+1) 维的数学物理模型是可以用反散射变换 (IST) 方法求解的. 在反散射变换方法建立以后, 人们又发现对于所研究的 (1+1) 维和 (2+1) 维的数学物理模型还存在着许多有趣的性质, 如: 无穷多守恒律和无穷多对称、双 (多) 哈密顿结构等. 目前已有许多长篇评述文章和书总结了这方面的发展,

如国际上 Ablowitz 和 Clarkson 的《孤立子、非线性发展方程和逆散射》, 国内谷超豪院士等著的《孤子理论及其应用》等文献. 然而, 到现在为止, 人们对非线性系统完全可积性的本质仍然还没有完全了解. 人们称一个非线性系统是可积的时候, 必须指明是在什么意义下的可积, 如:IST 可积 (在可以用反散射方法求解意义下的可积);Lax 可积 (在具有 Lax 对意义下的可积); Painlev é可积 (在具有 Painlev é性质意义下的可积); 在具有无穷多守恒律 (或具有无穷多对称) 意义下的可积等等. 也就是说, 到现在为止人们还没有真正给出完全可积的合适定义. 寻求可积系统一直是孤立子理论中的一项重要研究课题, 其中用 loop 代数的子代数设计等谱问题, 由相应 Lax 对的相容性可以导出 (1+1) 维孤子方程族, 如 TC 族、AKNS 族、WKI 族等. 特别是利用变分方法导出了著名的迹恒等式, 由此给出了求 (1+1) 维孤子方程族的 Hamilton 结构的方法. 最近屠规彰教授在对 loop 代数分析的基础上提出了从等谱问题出发获得方程族及其 Hamilton 结构的方法 —— 屠格式, 人们已获得了很多有意义的可积系. 但该格式中取的 loop 代数的基仅仅含有三类基元, 导出的方程族含有两个因变数, 三个的较少. 我们通过恰当构造 loop 代数的各种子代数获得了一些具有物理意义的可积 Hamilton 方程, 得到的方程族含有四个因变数, 然而这种方法所取的基元的阶数一般需要分别确定, 不宜作普遍的推广应用. 如果选取形式比较简单的 loop 代数的子代数, 含有多个位势、多个分量, 且使各基元的阶数一致，从等谱问题入手, 按屠格式给出新的可积族及其 Hamilton 结构，我们利用 loop 代数的子代数建立含多个位势函数分量的可积孤立子方程族, 以便对已有的著名方程族如 AKNS 族、KN 族、WKI 族等作统一表示. 另外, 对 loop 代数的子代数中的换位运算作线性叠加, 又可获得一批 loop 代数, 同样可设计出几类等谱问题. 由这些等谱问题通过求解静态零曲率方程得到时间等谱阵中元素间的递推关系. 再通过取适当修正项获得多个位势、多个分量的可积孤子方程族. 这里可能遇到的问题是不同的等谱问题会导出同一类孤子族.

本书的主要内容是由作者近年来在可积系统方面的一系列研究成果构成, 书中许多成果刊登在国内外重要期刊上.

本书的整理和出版, 自始至终得到了山东科技大学信息科学与工程学院院领导的支持和帮助, 并提出了许多很好的建议, 在此深表谢意. 梁向前、刘西奎、王新赠、张宁等老师和李柱、刘斌两位研究生在书稿整理、文字录入等方面做了不少的工作, 在此一并表示感谢. 由于我们水平有限, 书中不当之处, 敬请读者批评指正.

**作 者**

2006 年 1 月于青岛

# 目　录

# 第一章　绪论

可积系统理论是孤立子理论中的重要研究课题, 在可积系统研究中我国学者已经取得了很多研究成果. 谷超豪院士领导的“非线性科学”曾被列为我国攀登项目. 由于精确描述物理现象的非线性理论是科学发展的必然趋势. 其中将不可避免地经常涉及十分复杂且精确的代数与微分等非数值运算, 因此，借助计算机的大容量、高速度的特点, 用精确的符号计算, 机械化地实现数学功能非常必要, 其中关键是建立适合于所考虑问题的构造性的代数算法, 从而在计算机上实现、导致问题的机械化算法.

## 1.1　孤立子理论的产生及其发展

孤立子又称为孤立波. 它是指一大类非线性偏微分方程的许多具有特殊性质的解以及与其相应的物理现象. 用物理语言来说, 这些性质是: ① 能量比较集中于一个较窄小的区域; ② 两个孤立子相互作用时出现弹性散射现象 (即波形和波速能恢复到原状). 因此可以说, 孤立子具有粒子和波的许多性能. 在自然界有一定的普遍性. 比如, 天上涡旋星系的密度波、海上冲击波、等离子体、分子系统、生物系统、光纤中光的传播、非线性传输线、磁学、流体动力学以及基本粒子等都与孤立子休戚相关. 孤立子理论自 1965 年由 Zabusky 和 Kruskal 对孤立子命名后, 得到了迅速发展, 其发展可分为以下三个阶段.

第一阶段. 主要是在 19 世纪.1844 年 9 月 Scott Russell 在英国科学促进会第 14 次会议上作了题为《论波动》的报告, 记述了他沿着河道骑马追踪一种奇特的水波现象：1834 年 8 月, 他在骑马沿着运河旅游时, 偶然发现在狭窄的河道中行走的船突然停下时, 被船体带动的水团积聚在船头并剧烈的翻动着. 不久, 一个滚圆光滑且轮廓分明的巨大孤立波峰开始形成, 并急速离开船头向前运动. 在行进中波的形状及其速度并无明显的变化. 以后高度逐渐下降. 由此引进了孤立波的概念. 他进一步提出. 这种孤立波实际上是流体力学方程的一个

稳定解. 但限于当时数学理论和科学水平的限制, 无法从理论上给予孤立波以圆满的解释.10 年之后,Russell 在线水槽中做了一些实验, 用多种方法激发看到了相同的现象, 但 Russell 的学说并未能成功地使当时的物理学家信服. 从 Lord Rayleigh 在 1876 年发表的论文看到, 孤立波问题引起了当时物理学家的极大争论, 直到 1895 年,Korteweg 和 de Vries 导出了著名的 KdV 方程, 解释了 Russell 的浅水波. 与此同时, 在 1876-1882 年发现了 Bäcklund 变换, 成为后来发展孤立子理论的重要基础.

第二阶段, 大致在 1955 ～ 1975 年间.1955 年,Fermi,Pasta, Ulam(FPU) 用计算机计算了一维非线性晶格在各个震动模之间的转换, 发现在时间足够长时能量又似乎回到了开始的分布. 由于 FPU 问题是在频域内考察的, 因此未能发现孤波解. 后来 Toda 研究了这种模式的非线性振动, 得到了孤波解, 使 FPU 问题得到圆满解答, 从而激发起人们对孤立子的研究兴趣.

1962 年,Perring 和 Skyrme 将 Sine-Gordon 方程用于基本粒子研究, 结果表明: 这个方程具有孤立波, 即使碰撞后二个孤立波仍保持着原来的形状和速度.1965 年,Zabusky 和 Kruskal 命名孤立子 (soliton). 他们借助计算机详细考察了等离子体中孤立波的互相碰撞过程, 进一步证实了这类孤立波相互作用后不改变波形的论断, 由此他们命名孤立波为孤立子. 从此孤立子作为应用科学中的新概念诞生了, 并第一次出现在文献上.1967 年 Gardner，Greene，Kruskal 和 Miura 发明了求解 KdV 方程的逆散射方法, 这一发现不仅对应用技术提供了崭新的方法和概念, 而且对数学自身的发展也有深远的影响.1973 年, Scott，Chu，Mclaughlin 发表综述文章, 在电子、光学界普及了孤子知识; 同年 Hasegawa 和 Tappert 预言光纤孤子的存在;1975 年,Krumhansl 和 Schieffer 开始研究孤波的统计力学.

第三阶段，1973 年至今, 把孤子概念及理论广泛应用于物理学、生物学、天文学的每个领域. 同时, 开展了高维孤子的研究.1980 年非线性效应专刊《Physica D》问世. 与此同时光纤中的孤子已在实验中产生出来.

目前,"孤立子"一词虽然被广泛应用, 但是还没有一般形式的定义. 数学中将孤立子理解为非线性演化方程局部化的行波解. 此外, 孤立子也是各种各样的, 除常见的钟状和扭状孤立子外, 还有包络孤子、正孤子、反孤子、呼吸孤子以及它们叠加形成的孤立子.

## 1.2 孤立子理论研究概述

孤立子理论是应用数学和数学物理的一个重要组成部分, 它所包含的内容和研究方法比较丰富. 国内外学者从不同方面进行了比较系统的研究, 特别是近十几年来研究人员不断扩大, 所取得的成果令人瞩目. 下面我们从几个方面做一下概述.

### 1.2.1 吴方法与非线性演化方程的精确解

著名数学大师陈省身先生曾说过: 我们要做好的数学, 比如说解方程. 众所周知, 正因为代数方程根式求解创立了 Galois 理论, 该理论的巨大成就使数学家将 Galois 理论的思想和方法推广到微分方程, 导致了 Lie 群和 Lie 代数的产生, 近年来 Lie 群在微分方程上的应用取得了重大进展 [4~6]. 解方程不仅促进数学理论的发展, 而且是实际问题的需要, 比如大量的力学问题可归结为求解微分方程 (这里微分方程包括常微分方程和偏微分方程)[7~12]. 构造微分方程的解析解是既非常重要又非常困难的问题. 几百年来许多数学家和力学家做了大量工作, 但仍有大量方程无法求出解析解, 即使已经求出解析解, 也各有各的技巧, 没有统一的方法. 正如 M. Klein 所言, 微分方程求解只是技巧的汇编. 随着计算机科学技术的发展, 我们的目的是用代数方法给出统一的算法, 该算法可以在计算机上实现, 使得尽可能多的解析解能按统一的算法机械化地产生. 基于这种统一化思想, 我们对来自客观实际的孤立子方程 (组) 尽可能地用统一算法模式求解.

我国著名数学家吴文俊院士创立了多项式方程组求解的吴消元法. 它以计算机代数为工具, 给出了初等几何问题的机械化证明, 特别是这种方法可用于微分方程的精确求解. 如构造精确解、Painleve 检验、孤子族的生成及其 Lax 表示、可积系统的约化和分解、寻求对称

群等常涉及到十分复杂的符号计算和推理. 但这些符号计算具有重复性固定的规律, 许多计算复杂冗长，人力难以完成, 正是计算机代数的用武之地 [1].

1992 年, 石赫研究员利用吴方法求解了著名的 Yang-Baxter 方程 [14,15].1997 年, 石研究员利用张鸿庆教授处理 Maxwell 方程的思想 [16], 巧妙地引入一种线性微分变换, 利用吴消元法将复杂的 Yang-Mills 方程约化为三个简单的二阶线性偏微分方程 [14].

近来, 李志斌教授利用吴方法和计算机代数, 在非线性演化方程行波求解方面做了大量有益工作 [17~21]. 他引用了一种直接有效的 Tanh 法 [17,18], 将微分方程求解问题转化为代数方程求解, 沟通了吴方法与微分方程的关系, 成功地得到了一大批非线性演化方程的精确孤立子解. 著名的 Belousov-Zhabotiskii(BZ) 反应扩散方程主要出现于化学物理、生物物理等领域 [22], 其求解形式多种多样, 1996 年，李教授、石赫研究员利用吴方法统一地获得了方程 6 种行波解 [19], 这充分表明了吴方法在寻找微分方程新的精确解方面的巨大作用.

### 1.2.2 PDEs 的精确解及其若干求法介绍

寻求方程的解 (包括数值解和精确解) 是一个非常古老且很重要的课题. 有时为更准确地研究物体变化的性质, 我们需要寻求其对应方程的精确解. 自从 Russell 发现孤立子及 Korteweg 和他的博士 de Vries 提出 KdV 方程并获得其精确孤波解以来, 孤立子及一大批非线性方程的解的构造引起了人们的极大兴趣. 由于非线性发展方程的自身复杂性, 用现有的方法无法求出其非平凡的解, 即使获得了方程的精确解, 也只是少数的一些解, 无法求出其全部解, 并且对不同类型的方程, 用的方法可能不一样. 至今还没有任何一种方法可以包容其他方法, 除非这种方法能求出所有方程的所有解, 这看起来不太可能. 这就需要人们发现更新、更有效的方法来研究微分方程的求解问题.

虽说 PDEs 的求解技巧性较强, 但也蕴涵着一系列构造精确解的有效方法, 如反散射方法、Darboux 变换法、Hirota 方法、Riemann 问题方法 [22,23]、矩阵投影法 [24]、相似解方法 [25~32]、Painleve 截尾

展开法 [33~36] 等, 随着各种求解方法的出现, 过去难以求解的方程的精确解得到了解决. 而且还发现了许多有重要物理意义的新解 [1].

1967 年,Gardner, Greene, Kruskal 和 Miura[37,38] 发现了 KdV 方程反散射方法, 也称为非线性 Fourier 变换法, 利用量子力学中 Shrodinger 方程的特征问题及其反问题关系, 导出了 KdV 方程初值问题的解依赖于线性积分方程的关系, 得到了许多结果, 其中包括任意数目孤立波相互作用的显式解 [1]. Lax 又将上述思想加以推广, 用于一般非线性发展方程的求解问题中; Zakharov 和 Shabat[39] 本质上推广了这一方法, 解决了高阶 KdV 方程等; 屠规彰教授、李翊神教授等 [38,40~42] 更加一般化了这一方法, 并作了许多有代表意义的工作. 同时又开辟了 Bäcklund 变换法的广泛应用性, 由 Bäcklund 变换引出的非线性叠加原理将非线性发展方程的求解问题转化为纯代数运算, 由已知解迭代得到新解 [43~46].

1971 年,Hirota 引入了双线性方法, 为求非线性发展方程的孤子解提供了简单而有效的工具 [47~50]. 1975 年,Wahlquist 和 Estabrook[51] 提出了非线性方程的延拓结构概念, 给出了求 IST 方程的一个更系统的方法 [52,53].

1978 年, 张鸿庆教授 [16] 提出了微分方程求解的算子化方法, 称为 $AC = BD$ 方法. 其具体模式是: 设 $Au = 0$ 为待求解方程,$Dv = 0$ 为会解或易解方程, 对给定的算子 $A$, 构造算子对 $C, D$, 使得通过变换 $u = Cv$ 约化为 $Dv = 0$. $C\ker D = \ker A$, 并称 $Au = 0$ 是 C-D 可积系统. 若 $C\ker D \subset \ker A$, 但 $C\ker D \neq \ker A$, 则称 $Au = 0$ 是部分 C-D 可积系统. 用这种方法成功地求解了一大批力学中的方程 (组) 的精确求解问题 [7,9,10,54,55].

1994 年, 王明亮、李志斌教授提出了齐次平衡法又称为拟解法 [51~61], 成功地解决了一大类非线性发展方程的精确解 [57~67]. 1998 年, 范恩贵博士、张鸿庆教授进一步发展了齐次平衡法, 由此不仅得到了孤波型解, 而且还得到了其他类型的精确解, 比如三角函数形式解、奇性解等. 闫振亚博士、张鸿庆教授又将齐次平衡法再次延拓, 即将一般多项式形式解

$$u(\xi)=\sum_{i=0}^{m}a_iv^i(\xi),v'=k(1\pm v^2)\text{ 或 }v'=b_1+b_2v^2$$

改为

$$u(\xi)=\sum_{i=0}^{m}\cos\omega^{i-1}(\xi)[A_i\sin\omega(\xi)+B_i\cos\omega(\xi)]+a_0,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}=\sin\omega$$

的形式. 再利用齐次平衡法步骤得到了孤子方程 (组) 的不同形式的精确解 [68,69,70]. 其实, 齐次平衡法仅是 $AC=BD$ 的特例 [71,72].

### 1.2.3 Bäcklund 变换、Darboux 变换和无穷守恒定律

瑞典数学家 Bäcklund 于 1883 年研究负常数曲率的曲面时, 发现了 Sine-Gordon 方程的解 $u$ 和 $\bar{u}$ 有如下关系:

$$\left(\frac{u-u}{2}\right)_x=a\sin\frac{u+u}{2},\left(\frac{u+\bar{u}}{2}\right)_t=a^{-1}\sin\frac{u-\bar{u}}{2}$$

这就是 Sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换, 该变换给出了从 Sine-Gordon 方程的一个解得到另一个解的一个作法 [44]. 1974 年,Lamb[73] 给出了 Shrödinger 方程的 Bäcklund 变换;1976 年,Wahlquist 和 Estabrook[51] 提出了求非线性发展方程的 Bäcklund 变换的延拓方法. 把 Bäcklund 变换、守恒律及反散射变换统一在一个新概念即拟位势中.

1986 年, 谷超豪院士 [74,75,76] 从 Darboux 阵出发构造了 KdV 族及 AKNS 梯队的 Bäcklund 变换, 从而解决了许多方程族的 Bäcklund 变换问题. 但由于利用 Bäcklund 变换求解是由方程的旧解或者已知解来求新解, 实际运算起来相当繁杂, 从而限制了其应用. 当然互换定理和非线性叠加公式 [77] 能给出解之间的代数运算, 使运算复杂度降低,可由已知解递推得到新解,胡星标教授对此做了很好的研究工作[78~81]. 由于 Bäcklund 变换是由完全可积的非线性偏微分方程组所定义的,所以经典的 Bäcklund 变换的显式表达式一般是难以给出的,但是 Darboux 变换是得出显式解的有效方法[44],使用起来更简便.

究竟什么样的方程有孤立子解, 给定一个非线性方程如何寻找散射反演方法中所需要的线性方程? 冯康教授在 1981 年 2 月的一次应用数学报告会上指出 [77]: 诸如 KdV, Sine-Gordon 等一些典型的非线性波动方程, 它们都具有如下五个共同特点:

(1) 有孤立子解;

(2) 可以用反散射方法求解;

(3) 具有 Bäcklund 变换;

(4) 有无穷多个守恒定律;

(5) 可以化为完全可积的 Hamilton 系统.

这五个方面是相互紧密联系着的, 它们都反映了该方程描述的物理现象的某种稳定性和不变性. 其实, 关于守恒律的发现始于 1965 年 Whitham[82] 研究 KdV 方程, 并且得到了 KdV 方程的三个守恒律. 随后,Zabusky 和 Kruskal 在研究 KdV 方程数值解时发现了第四、第五个守恒律; 1968 年,Miura[83] 发现了很多有用的 Miura 变换, 借此证明了 KdV 方程有无穷个守恒律. 1970 年, Kruskal[84] 对更一般 KdV 方程守恒律的个数提出了一种猜想, 后被屠规彰教授所证实 [1]. 现在人们已经发现 [85~88], 守恒律与对称间的密切关系, 利用无穷对称可构造无穷守恒律 [89], 利用 Bäcklund 变换也可以构造出无穷守恒律 [77].

### 1.2.4 对称和微分方程

19 世纪末,SophusLie 引进了连续群的概念 [6](即现在的 Lie 群, 也称为对称群), 将微分方程求解的大多数不同技巧方法, 得到了统一和扩充. Lie 证明了一个常微分方程, 如果在点变换的单参数 Lie 变换群的作用下保持不变, 则其阶数可减少一次. 之后 Lie 又对 PDEs 进行了约化研究, 研究结果表明: 对线性 PDEs 在 Lie 群作用下的不变性通过变换直接导致解的叠加, 开创了 Lie 群理论在 PDEs 求解中的应用模式, 从此,Lie 群在微分方程中的应用受到人们的重视. 1918 年,Noether[90] 证明了如何由作用积分对称 (变换对称) 构造性地导出相应于 Euler-Lagrange 方程的守恒律. 比如, 由时间平移的不变性可

推出能量守恒; 线动量和角动量守恒分别由空间平移不变性和旋转不变性推出. 这样的变分对称群使 Euler-Lagrange 方程保持不变, 这些对称群可以通过 Lie 算法获得.

1969 年,Bluman 和 Cole[91,92] 把经典 Lie 群方法作了进一步推广, 提出了非经典 Lie 群方法. 1977 年,Olver[5,93] 证明了如何利用递推算子构造无穷多个守恒律, 使 PDEs 在这样的对称群下保持不变, 称这样的对称群为强对称. 由于 KdV 方程是最有代表性的具有实际背景的方程, 所以数学家常将其作为研究对称的重要例子之一. Olver 找到了 KdV 方程的两个对称 [94]; Fuchsseiner[95] 和 Chen[96] 分别利用不同方法得到了 KdV 方程的更多对称及其 Lie 代数结构, 现在中国科技大学的李翊神教授、田畴教授等在对称方面取得了许多重要研究成果 [97~99].

1989 年,Clarkson 和 Kruskal[100] 首先提出了约化 PDEs 的著名方法 —— 直接约化法 (CK 方法), 利用这种方法既简便又有效地求得了 Bousinesq 方程新的对称性约化, 这种方法的特点是不用繁杂的 Lie 群方法即可得到 PDEs 的相似解. 但是这种方法并非总是一般的方法, 1992 年,Nucci 和 Clarkson 给出了一个反例 [101] 用来说明非经典 Lie 群方法获得的相似解, 而用直接方法却不能得到. 近来楼森岳教授将直接法推广到 2+1 维 KP 方程和其他一大批非线性演化方程中, 获得了各种新的相似约化解 [102~104]. 楼教授在这方面的更具有特色的一点是,1993 年提出的形式级数对称法 [105~107], 用于获得了一大批非线性发展方程的含有时间任意函数的广义对称和 Lie 代数结构. 张鸿庆、范恩贵教授和闫振亚博士在相似约化方面也作了大量很有意义的重要研究工作 [30,32,108,110].

### 1.2.5 可积系统

19 世纪 20 年代,Hamilton 在描述几何学时发现了 Hamilton 系统, 成为力学上与 Lagrange 力学等价的又一种力学描述方式 [1]. 由于这类系统广泛存在于数理科学、生命科学以及社会科学的各个领域, 特别是天体力学、等离子物理、航天科学以及生物工程中的很多模型

都以 Hamilton 系统 (或它的扰动系统) 的形式出现, 因此, 该领域的研究多年来成为生机勃勃的研究方向[111]. 70 年代末期,Arnold 从辛几何角度叙述了 Hamilton 系统[112], 在辛几何框架下,Hamilton 系统理论表现形式更简洁明了. 对于有限维 Hamilton 系统理论有著名的 Liouville − Arnold 定理, 该定理给出了 Hamilton 系统可积的一个充分条件. 对于无限维 Hamilton 系统, 无穷多个彼此对合的首次积分的存在, 并不足以引出解的显式表示, 因此到目前为止, 还没有完全了解无穷维 Hamilton 系统完全可积性的本质. 对于无穷维 Hamilton 系统, 通常采用两种可积性定义, 即 Lax 意义下的可积性和 Liouville 意义下的可积性.

判定一个非线性发展方程的 Lax 可积性, 就是寻找 Lax 对表示或称为零曲率表示或 Lie 群结构方程. 1983 年,Drinfeld 和 Sokolov[113] 以 Kacmoody 代数为工具系统地构造了 KdV 方程的 Lax 表示. 1985 年, 谷超豪、胡和生院士[114] 根据曲面论中的基本方程, 提出了一类方程的可积性准则; 1988 年, 曹策问教授[115] 提出了保谱发展方程换位表示的新框架; 马文秀、乔志军教授等在此基础上做了一系列重要研究课题, 其关键在于寻找对合的首次积分. 1975 年,Moser[119] 给出了著名的 Calogero 模型和 Sutherland 模型产生的完全可积系统;1989 年, 曹策问教授[120] 首次提出在位势函数和特征函数的适当约束下, 由 Lax 对的非线性化产生有限维可积 Hamilton 系统思想, 由此利用可换流的对合解给出孤立子方程解的对合表示[121~125]. 曾云波、李翊神教授进一步发展了非线性化方法, 提出了在高阶对称约束条件下, 从无穷维 Hamilton 系统到有限维 Hamilton 系统的分解. 在零曲率表示理论框架内, 将有限维 Hamilton 分解为两个可交换的 $x$ 和 $t_n$ 有限维 Hamilton 系统[126~128].

关于无穷维 Hamilton 系统的建立, 最有成效的简便方法是屠规彰教授在 1988 年提出的, 即用带约束变分计算孤立子的 Hamilton 系统的简洁方法[129], 马文秀博士称这一方法为屠格式[130], 利用这一方法可建立一大批可积 Hamilton 系统[131,132]. 范恩贵教授和张鸿庆教授将屠格式与非线性化思想、Darboux 变换、孤子精确解巧妙地结

合, 做出了许多重要有益的研究工作[133,134]. 胡星标教授[135]又将屠格式由 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 推广到 $\tilde{A}_2$ 上, 给出了迹恒等式的推广表示形式, 从而扩大了屠格式及其应用范围. 郭福奎教授将屠格式的应用范围不仅由 $\tilde{A}_1$ 推广到 $\tilde{A}_2$ 上, 而且还将 Hamilton 系统中的位势个数由 2~3 个推广到了多个情形[136,137].

作为可积系统的进一步研究是可积耦合问题[138,139], 它是在研究无中心的 Virasoro 对称代数或孤立子方程时产生的. 人们已经找到两种求可积耦合的方法, 一是原方程加上它的对称方程, 二是摄动方法. 其实, 寻找求可积耦合的一个简单方法可在零曲率表示范围中进行. 关于方程族的扩展可积模型的 Hamilton 结构，郭福奎，张玉峰教授[167]利用变分法利用二次型等式，成功获得一大批扩展可积模型的 Hamilton 结构.

# 第二章　C-D 可积系统及其应用

在本章中, 我们重点介绍 C-D 可积系统的定义及理论, 并将其用于非线性演化方程 (组) 的精确求解中.

## 2.1　C-D 可积系统与 PDEs 的精确解

1978 年, 张鸿庆教授将代数消元法和因式分解思想方法用于微分方程组, 成功地解决了一大批超定微分方程组的约化问题, 并提出解微分方程的 $AC = BD$ 模式. 其具体格式是:

设 $Au = 0$ 为待求解方程,$Dv = 0$ 为会解或易解方程. 对给定的算子 $A$, 构造算子 $C$, $D$ 使得 $Au = 0$ 通过变换 $u = Cv$ 约化为 $Dv = 0$, 其中 $Au = 0$ 称为原方程,$Dv = 0$ 称为目标方程.

算子 $A$ 和 $D$ 可由下表给出:

| $Au = 0$ | $\xrightarrow{u = Cv}$ | $Dv = 0$ |
|---|---|---|
| 任意微分方程 | | 对角形方程 |
| 非线性方程 | | 线性方程 |
| 变系数方程 | | 常系数方程 |
| 微分方程 | | 代数方程 |
| 高维方程 | | 低维方程 |
| 高阶方程 | | 低阶方程 |
| 不可分离变量方程 | | 可分离变量方程 |
| 任意的方程 | | 具有特定性的方程 |
| 不会解的方程 | | 会解的方程 |

以上内容都是很丰富的. 比如由高阶方程到低阶方程的方法就较多, 比较有效的方法当然是 Lie 变换群方法了.

**定义 2.1.1**　如果算子 $A$, 存在算子 $C$, $D$ 使得 $AC = BD$, $C\ker D = \ker A$, 其中 $\ker A = \{u|Au = 0\}$, $\ker D = \{v|Dv = 0\}$, 则称 $Au = 0$ 为 C-D 可积系统. 若 $C\ker D \subset \ker A$ 但 $C\ker D \neq \ker A$, 则称 $Au = 0$ 是部分 C-D 可积系统.

我们的任务有两个：一是给定算子 $A$, 如何构造简易的算子 $C$ 和 $D$, 使 $C\ker D = \ker A$; 二是给定算子 $C$ 和 $D$ 求 $A$, 即任意的 $u \in \ker A$, 超定方程组 $\begin{cases} Cv = u \\ Dv = 0 \end{cases}$ 的相容条件是 $Au = 0$.
对于第一个任务, 我们有下面的结果：

**定理 2.1.1** 设 $X$ 是线性空间,$A, B, C, D$ 是 $X$ 自身的算子. 如果 $AC = BD$, $B0 = 0$, $C\ker D \supset \ker A$, 则方程 $Au = 0$ 的解为 $u = Cv$. 其中 $v$ 满足 $Dv = 0$.

**推论 2.1.1** 设 $A, B, C, D$ 是线性算子,$f \in X, AC = BD, \ker D \supset \ker A$ ($\overline{C\ker D} \supset \ker A$). 则非齐次微分方程 $Au = f$ 的解 (或近似解) 为 $u = Cv + e$, 其中 $Dv = g, Ae + Bg = f$. 如果存在从 $X$ 到 $X$ 的算子 $M, N$ 和 $E$, 使得 $AM + BN = E$, 则 $e = M\varphi$ 和 $g = N\varphi$ 满足 $Ae + Bg = f$, 其中 $\varphi$ 满足方程 $E\varphi = f$.

**例 2.1.1** 化 PDEs 为对角形

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = \dfrac{\partial u_2}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial u_2}{\partial x} \end{cases} \tag{2.1}$$

(2.1) 相当于 $u = 0$, 可化为

$$Au = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & -\dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$$

令 $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = Cv = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} v$, 并代入上式得：

$$Au = ACv = \begin{pmatrix} 0 \\ (\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2})v \end{pmatrix} = 0 (\text{此式相当于 } AC = BD).$$

反过来, 验证 $C\ker D = \ker A$ 相当于解超定方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = u_1 \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = u_2, \Delta v = (\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2})v = 0 \end{cases}$$

共相容性条件为 (2.1).

**例 2.1.2** 化非线性 ODEs 为线性 ODEs.

考虑 Bernoulli 方程:

$$Au = u' + Pu - Qu^n = 0, [n \neq 1, P = P(x), Q = Q(x)]$$

令

$$u = Cv = v^{\frac{n}{1-n}}$$

则

$$Au = ACv = v^{\frac{n}{1-n}}(\frac{1}{1-n}v' + Pv - Q) = 0$$

(即 $BDv = 0$), 其中

$$Dv = \frac{1}{1-n}v' + Pv - Q = 0$$

是线性 ODE.

**例 2.1.3** 化非线性 PDEs 为线性 PDEs.

考虑 Kupershmidt 方程

$$\begin{cases} u_t + uu_x + h_x + \sigma u_{xx} = 0 \\ h_t + (uh)_x - \sigma h_{xx} = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

作变换

$$u = -2\sigma\frac{v_x}{v}, h = 4\sigma^2\frac{2vv_{xx} - v_x^2}{v^2}$$

则 (2.2) 约化为线性偏微分方程

$$v_t - \sigma v_{xx} = 0 \tag{2.3}$$

(2.3) 是易解的热传导方程, 由此可求得 (2.2) 的孤子解为

$$u=-k\sigma\tanh\frac{k}{2}(x+k\sigma t)-k\sigma, h=k^2\sigma^2\mathrm{sech}^2\frac{k}{2}(x+k\sigma t)$$

**例 2.1.4** 将变系数 PDEs 化为常系数 PDEs.

对于变系数的 KdV 方程

$$u_t+h_1(t)(6uu_x+u_{xxx})+4h_2(t)u_x-h_3(t)(2u+xu_x)=0 \quad (2.4)$$

作变换

$$u=g^2v, \xi=gx-4\int h_2g\mathrm{d}t, \tau=\int h_1g^3\mathrm{d}t, g=\exp(\int h_3\ \mathrm{d}t)$$

则 (2.4) 化为常系数的 KdV 方程

$$v_\tau+6vv_\xi+v_{\xi\xi\xi}=0$$

关于其他类型方程间的转化例子在此就不再例举了. 将推论 2.1.1 作一般化推广, 得到如下结果:

**定理 2.1.2** 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中,$a_{ij}$ 是线性偏微分算子;$B$、$C, D$ 是偏微分算子矩阵, 且满足 $AC=BD$, $C\ker D=\ker A$, 则非齐次方程 $Au=f$ 的一般解可表示为

$$u=Cv+e,\quad Dv=g$$

其中 $e, g$ 是方程 $Ae+Bg=f$ 的一组解.

**例 2.1.5** 设 $Au=0$ 是 Maxwell 方程 $\begin{cases}\mathrm{rot}H=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial E}{\partial t}+\dfrac{4\pi}{c}j\\ \mathrm{rot}E=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial H}{\partial t}\\ \mathrm{div}H=0\\ \mathrm{div}E=4\pi\rho\end{cases}$

易见,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_y & -\frac{1}{c}\partial_t & 0 & 0 \\ \partial_z & 0 & -\partial_x & 0 & -\frac{1}{c}\partial_t & 0 \\ \partial_y & \partial_x & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c}\partial_t \\ 0 & 0 & 0 & \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{1}{c}\partial_t & 0 & 0 & 0 & -\partial_z & \partial_y \\ 0 & \frac{1}{c}\partial_t & 0 & \partial_z & 0 & -\partial_x \\ 0 & 0 & \frac{1}{c}\partial_t & -\partial_y & \partial_x & 0 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} -\partial_x+\frac{1}{c^2}\partial_x^{-1}\partial_t^2 & -\partial_y & \partial_z & 0 & \frac{1}{c}\partial_x^{-1}\partial_{zt}^2 & -\frac{1}{c}\partial_x^{-1}\partial_{yt}^2 \\ -\frac{1}{c}\partial_z^{-1}\partial_{yt}^2 & \frac{1}{c}\partial_z^{-1}\partial_{xt}^2 & 0 & -\partial_x & -\partial_y & -\partial_z+\frac{1}{c^2}\partial_z^{-1}\partial_t^2 \end{pmatrix}^T$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c}\partial_x^{-1}\partial_t & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c}\partial_z^{-1}\partial_t-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, D=\begin{pmatrix} \Xi & 0 \\ 0 & \Xi \end{pmatrix}$$

其中 $\Xi=\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2-\frac{1}{c^2}\partial_t^2$. 容易验证 $AC=BD$.

$$f=\left(\frac{4\pi}{c}j_1,\frac{4\pi}{c}j_2,\frac{4\pi}{c}j_3,4\pi\rho,0,0,0,0\right)^T$$

$$g=\left(\frac{4\pi}{c}\partial_z^{-1}(\partial_x j_2-\partial_y j_1),-4\pi\rho-\frac{4\pi}{c^2}\partial_x^{-1}\partial_z^{-1}\partial_t j_1\right)^T$$

$$e=\left(\frac{4\pi}{c}\partial_z^{-1}j_2,-\frac{4\pi}{c}\partial_z^{-1}j_1,0,0,0,\frac{4\pi}{c^2}\partial_z^{-1}\partial_x^{-1}\partial_t j_1\right)^T$$

则 $Ae+Bg=f$.

由定理 2.1.2, 我们得到

$$
\begin{aligned}
&u = Cv + e = \\
&\begin{pmatrix} -\partial_x + \frac{1}{c^2}\partial_x^{-1}\partial_t^2 & -\partial_y & -\partial_z & 0 & \frac{1}{c}\partial_x^{-1}\partial_{zt}^2 & -\frac{1}{c}\partial_x^{-1}\partial_{yt}^2 \\ -\frac{1}{c}\partial_x^{-1}\partial_{yt}^2 & \frac{1}{c}\partial_z^{-1}\partial_{xt}^2 & 0 & \partial_x & -\partial_y & -\partial_z + \frac{1}{c^2}\partial_z^{-1}\partial_t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \\
&+ \left(\frac{4\pi}{c}\partial_z^{-1}j_2, -\frac{4\pi}{c}\partial_z^{-1}j_1, 0, 0, 0, \frac{4\pi}{c^2}\partial_x^{-1}\partial_z^{-1}\partial_t j_1\right)^T
\end{aligned}
$$

$$
Dv = \begin{pmatrix} \Xi & 0 \\ 0 & \Xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\pi}{c}\partial_z^{-1}(\partial_x j_2 - \partial_y j_1) \\ 4\pi\rho \quad \frac{4\pi}{c^2}\partial_x^{-1}\partial_z^{-1}\partial_t j_1 \end{pmatrix}
$$

这里有一个自然的问题, 即如何构造算子对 $C$ 和 $D$? 这是下一节的内容.

# 2.2 C-D 对的构造方法

## 2.2.1 微分代数消元法

**定理 2.2.1** 设 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 是凸邻域 $\Omega$ 上的具有常系数的线性偏微分算子

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}
$$

$A_{ij}$ 表示元素 $a_{ij}$ 的代数余子式,$A_{3j} = B_{3j}E(j = 1,2,3)$, $A_{23} = B_{23}E$, 其中 $E$ 是 $A_{23}$ 和 $A_{3j}(j = 1,2,3)$ 的最大公因式,$a_{11}$ 与 $a_{12}$ 互质,$A_{32}$ 和 $B_{33}$ 互质, 则 $Au = 0$ 的一般解由

$$
\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & B_{31} \\ 0 & -a_{11} & B_{32} \\ 0 & 0 & B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix}
$$

给出, 其中 $\varphi, \psi$ 分别满足 $E\varphi = 0, \dfrac{|A|}{E}\psi = 0$, $|A|$ 表示 $A$ 的行列式, 此时有

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & -B_{33} & 0 \\ b_{31} & B_{23} & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & B_{31} \\ 0 & -a_{11} & B_{32} \\ 0 & 0 & B_{33} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{|A|}{E} \end{pmatrix}$$

其中 $b_{ij}$ 是任意微分算子, 易验证 $AC = BD$.

**例 2.2.1** 平面张力问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \\ (\partial_x^2 + \partial_y^2)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \end{cases}$$

易验证

$$A = \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y & 0 \\ 0 & \partial_x & \partial_y \\ \Delta & 0 & \Delta \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{pmatrix}$$

其中 $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$, 则 $A_{31} = \partial_y^2, A_{32} = -\partial_{xy}^2, A_{33} = \partial_x^2, E = 1, |A| = \Delta^2$. 由定理 2.2.1 可知:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

其中 $v$ 满足 $\Delta^2 v = 0$, 称 $v$ 为 Airy 应力函数.

## 2.2.2 齐次平衡法

由王明亮、李志斌教授提出的构造非线性演化方程的孤子解的齐次平衡法, 成功地解决了一大类非线性演化方程 (组) 的精确孤子解, 其主要步骤是:

(i) 对给定的非线性方程 (如两个自变量情形)

$$A(u, u_x, u_t, u_{xx}, \cdots) = 0 \tag{2.5}$$

通过平衡 (2.5) 中最高阶导数项与最低阶非线性项, 可选取 $u$ 为 $1$、$\partial_t^i \partial_x^j f(w)$,$(i, j = 0, 1, \cdots)$ 的线性组合

$$u = F(f(w)) \tag{2.6}$$

其中 $f(w)$, $w(x,t)$ 为待求函数.

(ii) 将 (2.6) 代入 (2.5) 经求导整理后, 将 $w$ 相同导数和最高次幂项合并在一起并令其系数为 0, 可得到 $f(w)$ 的常微分方程, 解之有

$$f = G(w) \tag{2.7}$$

(iii) 将 $G(w)$ 的各阶导数的非线性项, 用 $G(w)$ 的最高阶的导数来代替, 再将 $G(w)$ 的各阶导数项分别合并在一起并令其系数为 0, 而得 $w = w(x,t)$ 的各次齐次型的一般是超定的 PDE 方程组

$$S(w) = 0 \tag{2.8}$$

(iv) 设 (2.8) 式有解

$$w = 1 + e^{\alpha x + \beta t} \tag{2.9}$$

其中 $\alpha$、$\beta$ 待定. 将 (2.9) 代入 (2.8) 可得一复杂的代数方程组, 利用吴方法求解.

范恩贵博士、张鸿庆教授又进一步发展了这种方法, 得到了奇性孤波解、三角函数形式解或其他形式的孤子解.

**例 2.2.2** 考虑组合 KdV 与 MKdV 方程

$$u_t + 6(au + bu^2)u_x + cu_{xxx} = 0 \tag{2.10}$$

令

$$u = f'(\varphi)\varphi_x + u_1(x,t) \tag{2.11}$$

则

$$u_t = f''\varphi_x\varphi_t + f'\varphi_{xt} + u_{1t} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} 6auu_x =& 6a\varphi_x^3 f'f'' + 6a\varphi_x\varphi_{xx}f'^2 + 6au_1\varphi_x^2 f'' \\ &+(6au_1\varphi_{xx} + 6au_{1x}\varphi_x)f' + 6au_1u_{1x} \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} 6bu^2u_x =& 6b(\varphi_x^4 f'^2 f'' + \varphi_x^2\varphi_{xx}f'^3) + (u_{1x}\varphi_x^2 + 2u_1\varphi_x\varphi_{xx})f'^2 \\ &+2u_1\varphi_x^3 f'f'' + u_1^2\varphi_x^2 f'' + (2u_1u_{1x}\varphi_x + u_1^2\varphi_{xx})f' \\ &+u_1^2u_{1x} \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} cu_{xxx} =& c[f^{(4)}\varphi_x^4 + 6\varphi_x^2\varphi_{xx}f''' + (4\varphi_x\varphi_{xxx} + 3\varphi_{xx}^2)f'' \\ &+f'\varphi_{xxxx} + u_{1xxx}] \end{aligned} \tag{2.15}$$

将 (2.12)~(2.15) 代入 (2.10) 得:

$$\begin{aligned} &u_t + 6auu_x + 6bu^2u_x + cu_{xxx} \\ &= (6bf'^2f'' + cf^{(4)})\varphi_x^4 + 6af'f''\varphi_x^3 + 6b\varphi_x^2\varphi_{xx}f'^3 + 12bu_1\varphi_x^3 f'f'' \\ &\quad +6c\varphi_x^2\varphi_{xx}f''' + [f''\varphi_x\varphi_t + 6a\varphi_x\varphi_{xx}f'^2 + 6bu_1^2\varphi_x^2 f''c(4\varphi_x\varphi_{xxx} \\ &\quad +3\varphi_{xx}^2)f''] + 6au_1\varphi_x^2 f'' + 6b(u_{1x}\varphi_x^2 + 2u_1\varphi_x\varphi_{xx})f'^2 \\ &\quad +[(6au_1\varphi_{xx} + 6au_{1x}\varphi_x)f' + f'\varphi_{xt} + 6b(2u_1u_{1x}\varphi_x + u_1^2\varphi_{xx})f' \\ &\quad +cf'\varphi_{xxxx}] + (u_{1t} + 6au_1u_{1x} + 6bu_1^2u_{1x} + cu_{1xxx}) \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$6bf'^2f'' + cf^{(4)} = 0 \tag{2.17}$$

则

$$f'^3 = \frac{c}{2b}f''' \tag{2.18}$$

$$f'f'' = \sqrt{\frac{-c}{4b}}\varepsilon f''' \tag{2.19}$$

$$f'^2 = \sqrt{\frac{-c}{b}}\varepsilon f''' \tag{2.20}$$

$$f' = -\sqrt{\frac{-c}{b}}\varepsilon\frac{1}{\varphi} \tag{2.21}$$

其中 $\varepsilon = \pm 1$. 将 (2.17)~(2.21) 代入 (2.16) 得:

$$\begin{aligned}u_t &+6auu_x + 6bu^2u_x + cu_{xxx}\\ &= (3a\sqrt{\frac{-c}{b}}\varepsilon\varphi_x^3 + 6bu_1\varphi_x^3 + 3c\varphi_{xx}^2)f''' + (\varphi_x\varphi_t + 6bu_1^2\varphi_x^2\\ &+6au_1\varphi_x^2\sqrt{\frac{-c}{b}}\varepsilon u_{1x}\varphi_x + 12\sqrt{\frac{-c}{b}}\varepsilon u_{1x}\varphi_x\varphi_{xx} + 6a\sqrt{\frac{-c}{b}}\varepsilon\varphi_x\varphi_{xx}\\ &+4c\varphi_x\varphi_{xxx} + 3c\varphi_{xx}^2)f'' + (6au_1\varphi_{xx} + 6au_{1x}\varphi_x + 12u_1u_{1x}\varphi\\ &+6bu_1^2\varphi_{xx} + c\varphi_{xxxx})f' + (u_{1t} + 6au_1u_{1x} + 6bu_1^2u_{1x} + cu_{1xxx})f\end{aligned} \tag{2.22}$$

在 (2.22) 中, 令 $f''',f'',f',f$ 的系数为 0 得

$$\begin{aligned}&3a\varepsilon\sqrt{\frac{-c}{b}}\varphi_x^3 + 6b\varepsilon\sqrt{\frac{-c}{b}}u_1\varphi_x^3 + 3c\varphi_x^2\varphi_{xx} = 0\\ &\varphi_x\varphi_t + 6a\varepsilon\sqrt{\frac{-c}{b}}\varphi_x\varphi_{xx} + 6au_1\varphi_x^2 + 6b\varepsilon\sqrt{\frac{c}{b}}u_{1x}\varphi_x^2\\ &\quad +12b\varepsilon\sqrt{\frac{-c}{b}}u_1\varphi_x\varphi_{xx} + 6bu_1^2\varphi_x^2 + 4c\varphi_x\varphi_{xxx} + 3c\varphi_{xx}^2 = 0 \quad (2.23)\\ &6au_1\varphi_{xx} + 6au_{1x}\varphi_{xx} + \varphi_{xt} + 12u_1u_{1x}\varphi + 6bu_1^2\varphi_{xx} + c\varphi_{xxxx} = 0\\ &u_{1t} + 6au_1u_{1x} + 6bu_1^2u_{1x} + cu_{1xxx} = 0 \quad (2.24)\end{aligned}$$

上式成立, 只需下式成立

$$\begin{aligned}&\varepsilon\sqrt{\frac{-c}{b}}(a + 2bu_1)\varphi_x + c\varphi_{xx} = 0\\ &6au_1\varphi_x + \varphi_t + 6bu_1^2\varphi_x + c\varphi_{xxxx} = 0\\ &u_{1t} + 6au_1u_{1x} + 6bu_1^2u_{1x} + cu_{1xxx} = 0\end{aligned} \tag{2.25}$$

其中 $a + 2bu_1 \neq 0$.

在 (2.23) 中求出 $\varphi_t$, 并关于 $x$ 求导得:

$$\varphi_{xt}+6a\varepsilon\sqrt{\frac{-c}{b}}\varphi_{xxx}+6au_{1x}\varphi_x+6au_1\varphi_{xx}+6b\varepsilon\sqrt{\frac{-c}{b}}u_{1xx}\varphi_x$$
$$+6b\varepsilon\sqrt{\frac{-c}{b}}u_{1x}\varphi_{xx}+12b\varepsilon\sqrt{\frac{-c}{b}}u_{1x}\varphi_{xx}+12b\varepsilon\sqrt{\frac{-c}{b}}u\varphi_{xxx}$$
$$+12bu_1u_{1x}\varphi_x+6bu_1^2\varphi_{xx}+4c\varphi_{xxxx}+3c\left(\frac{\varphi_{xx}^2}{\varphi_x}\right)'_x=0 \tag{2.26}$$

(2.26) 式减去 (2.24) 式得:

$$\varphi_{xt}+6a\varepsilon\sqrt{\frac{-c}{b}}\varphi_{xxx}+6au_{1x}\varphi_x+6au_1\varphi_{xx}+6b\varepsilon\sqrt{\frac{-c}{b}}u_{1xx}\varphi_x$$
$$+6b\varepsilon\sqrt{\frac{-c}{b}}u_{1x}\varphi_{xx}+12b\varepsilon\sqrt{\frac{-c}{b}}u_{1x}\varphi_{xx}+12b\varepsilon\sqrt{\frac{-c}{b}}u\varphi_{xxx}$$
$$+12bu_1u_{1x}\varphi_x+6bu_1^2\varphi_{xx}+4c\varphi_{xxxx}+3c\left(\frac{\varphi_{xx}^2}{\varphi_x}\right)'_x=0 \tag{2.27}$$

对 (2.27) 式关于 $x$ 积分一次得:

$$2\varepsilon\sqrt{\frac{-c}{b}}\varphi_x\varphi_{xx}(a-2bu_1)+2b\varepsilon\sqrt{\frac{-c}{b}}u_{1x}\varphi_x^2+c\varphi_x\varphi_{xxx}+c\varphi_{xx}^2=0 \tag{2.28}$$

将 (2.25) 第一式及其关于 $x$ 的一阶导数代入 (2.28) 得:

$$\sqrt{\frac{-c}{b}}(a+2bu_1)\varphi_x\varphi_{xx}+c\varphi_{xx}^2=0 \tag{2.29}$$

令 $\varphi_x=y$, 则 $\varphi_{xx}=y'$, 将其代入 (2.29) 并解之得

$$\varphi=\int e^{-\frac{1}{c}\int^x\sqrt{\frac{-c}{b}}(a+2bu_1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+k_1x+k_2 \tag{2.30}$$

其中 $k_1,k_2$ 为任意常数. 将 (2.21) 代入 (2.11) 得到组合 KdV 与 MKdV 方程的 Bäcklund 变换

$$u=\sqrt{\frac{c}{b}}\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\ln\varphi+u_1(x,t) \tag{2.31}$$

将 (2.30) 代入 (2.31) 得到 (2.10) 的一般求解公式：

$$u=-\sqrt{\frac{-c}{b}}\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(\int_0^x e^{-\frac{1}{c}\int_0^x\sqrt{\frac{-c}{b}}(a+2bu_1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+k_1x+k_2\right) \tag{2.32}$$

下面求方程 (2.10) 的几个特解.

令方程 (2.10) 的行波解为

$$u(x,t)=u(\xi)=u(kx-\omega t) \tag{2.33}$$

将 (2.33) 式代入 (2.10) 并积分一次得：

$$-\omega u+6\left(\frac{a}{2}ku^2+\frac{b}{3}ku^3\right)+ck^3u_{\xi\xi}=0 \tag{2.34}$$

在 (2.33) 中，分别令

$$\begin{cases}u=A_0+A_1v\\ v'=\pm(1-v^2)\end{cases},\qquad \begin{cases}u=B_0+B_1v\\ v'=\theta(1+v^2)\end{cases} \tag{2.35}$$

并分别代入 (2.34) 式求出待定系数 $A_0$、$A_1$、$B_0$、$B_1$、$\theta$ 的值后代入 (2.35) 即可得到方程的一组特解

$$u(x,t)=-\frac{a}{2b}\pm\sqrt{\frac{c}{b}}k\tan\left[kx+\left(\frac{3a^2}{2b}k+2ck^3\right)t+\xi_0\right] \tag{2.36}$$

$$u(x,t)=-\frac{a}{2b}\pm\sqrt{\frac{-c}{b}}k\tan\left[kx+\left(\frac{3a^2}{2b}k-2ck^3\right)t+\xi_0\right] \tag{2.37}$$

$$u(x,t)=-\frac{a}{2b}\pm\sqrt{\frac{-c}{b}}k\coth\left[kx+\left(\frac{3a^2}{2b}k+2ck^3\right)t+\xi_0\right] \tag{2.38}$$

$$u(x,t)=-\frac{a}{2b}\pm\sqrt{\frac{-c}{b}}k\coth\left[kx+\left(\frac{3a^2}{2b}k-2ck^3\right)t+\xi_0\right] \tag{2.39}$$

其中 $k$、$\xi_0$ 为任意常数. 将 (2.36)~(2.39) 代入 (2.32) 就得到组合 KdV 与 MKdV 方程的另一组精确解的表达式.

$$\overline{u}(x,t)=-\sqrt{\frac{-c}{b}}\varepsilon\frac{\exp\left(\pm2k^2\tan k[kx+\left(\frac{3a^2}{2bk+2ck^3}\right)t+\xi_0]\right)+k_1}{\int^x\exp\left(\pm2k^2\tan h[kx+\left(\frac{3a^2}{2bk+2ck^3}\right)t+\xi_0]\right)\mathrm{d}x+k_1}$$

$$\overline{u}(x,t)=-\sqrt{\frac{-c}{b}}\varepsilon\frac{\exp\left(\pm2k^2\coth[kx+\left(\frac{3a^2}{2bk+2ck^3}\right)t+\xi_0]\right)+k_1}{\int^x\exp\left(\pm2k^2\coth[kx+\left(\frac{3a^2}{2bk+2ck^3}\right)t+\xi_0]\right)\mathrm{d}x+k_1x+k_2}$$

$$\overline{u}(x,t)=\sqrt{\frac{-c}{b}}\varepsilon\frac{\left(\cos[kx+(\frac{3a^2}{2b}k+2ck^3)t+\xi_0]\right)^{\pm2}+k_1}{\int^x\left(\cos[kx+(\frac{3a^2}{2b}k+2ck^3)t+\xi_0]\right)^{\pm2}\mathrm{d}x+k_1x+k_2}$$

$$=\begin{cases}-\sqrt{\frac{-c}{b}}\varepsilon\dfrac{\left(\cos[kx+(\frac{3a^2}{2b}k+2ck^3)t+\xi_0]\right)^{2}+k_1}{\frac{1}{4k}\sin[2kx+2(\frac{3a^2}{2b}k+2ck^3)t+2\xi_0]+(k_1+\frac{1}{2})x+k_2}\\ -\sqrt{\frac{-c}{b}}\varepsilon\dfrac{\left(\cos[kx+(\frac{3a^2}{2b}k+2ck^3)t+\xi_0]\right)^{-2}+k_1}{\frac{1}{k}\tan[kx+(\frac{3a^2}{2b}k+2ck^3)t+\xi_0]+k_1x+k_2}\end{cases}$$

$$\overline{u}(x,t)=-\sqrt{\frac{-c}{b}}\varepsilon\frac{\left(\cos[kx+(\frac{3a^2}{2b}k+2ck^3)t+\xi_0]\right)^{\pm2}+k_1}{\int^x\left(\cos[kx+(\frac{3a^2}{2b}k+2ck^3)t+\xi_0]\right)^{\pm2}\mathrm{d}x+k_1x+k_2}$$

$$=\begin{cases}\sqrt{\frac{-c}{b}}\varepsilon\dfrac{\left(\cos[kx+(\frac{3a^2}{2b}k+2ck^3)t+\xi_0]\right)^{2}+k_1}{\frac{1}{4k}\sin[2kx+2(\frac{3a^2}{2b}k+2ck^3)t+2\xi_0]+(k_1+\frac{1}{2}x+k_2)}\\ -\sqrt{\frac{-c}{b}}\varepsilon\dfrac{\left(\cos[kx+(\frac{3a^2}{2b}k+2ck^3)t+\xi_0]\right)^{-2}+k_1}{\frac{1}{k}\tan[kx+(\frac{3a^2}{2b}k+2ck^3)t+\xi_0]+k_1x+k_2}\end{cases}$$

### 2.2.3 假设与齐次平衡综合法

对于许多复杂的微分方程 (组), 找到简单的适当 C-D 对往往比较困难, 但我们可以考虑其反问题. 即从目标方程 $Dv=0$ 开始 (这是已知的易解方程). 假定 $u=Cv$ 是某个确定形式, 往往是某函数的多项式形式. 该多项式的次数由齐次平衡法来确定. 将确定的 $u=Cv$ 代入已知方程 $Au=0$, 通过 $Dv=0$, 可求出非线性演化方程的精确解及 Bäcklund 变换等有趣问题.

**例 2.2.3** 考虑 Burgers-KdV 方程

$$Au=u_t+uu_x-\alpha u_{xx}+\beta u_{xxx}=0 \tag{2.40}$$

其中 $\alpha,\beta$ 分别代表耗散系数和色散系数. 该方程是人们在研究含气

泡的液体流动及弹性管道中的液体流动时提出的，最近也有人将它用在湍流的研究中，因此研究该方程的精确解具有重要意义.

设

$$u(x,t)=u(\xi), \quad \xi=x-\lambda t$$

则 (2.40) 化为关于 $\xi$ 的 ODE:

$$Dv=u''(\xi)-\frac{\alpha}{\beta}u'(\xi)+\frac{1}{2\beta}u^2-\frac{\lambda}{\beta}u+\frac{c}{\beta}=0 \tag{2.41}$$

为了求解 (2.41)，设 $u(\xi)=\sum\limits_{i=0}^{m}A_i v^i(\xi), v'=k(1-v^2)$，则由改进的齐次平衡法，即平衡 ODE(2.41) 的线性最高阶导数项与非线性项确定出 $m=2$. 由此得到 (2.41) 的如下有限形式:

$$u=u(\xi)=A_0+A_1v+A_2v^2, \quad v'=k(1-v^2) \tag{2.42}$$

其中 $A_i$ 为待定系数. 将 (2.42) 代入 (2.41)，并设 $v$ 的幂系数为 0 得到如下的超定方程组:

$$\begin{aligned}
&6\beta A_2k^2+\frac{1}{2}A_2^2=0, 2\beta A_1k^2+2\alpha kA_2+A_1A_2=0\\
&-8\beta A_2k^2+\alpha kA_1+\frac{1}{2}A_1^2+A_0A_1-\lambda A_2=0\\
&-2\beta A_1k^2-2\alpha A_2k+A_0A_1-\lambda A_1=0\\
&2\beta A_2k^2-\alpha A_1k+\frac{1}{2}A_0^2-\lambda A_0+c=0
\end{aligned}$$

利用吴消元法求该方程组得

$$k=\pm\frac{\alpha}{\beta}, \quad \lambda=\pm\frac{\sqrt{288\alpha^4+10^4\beta^2c}}{50\sqrt{2}\beta} \tag{2.43}$$

$$A_0=\lambda+\frac{3\alpha^2}{25\beta}, A_1=\mp\frac{6\alpha^2}{25\beta}, A_2=-\frac{3\alpha^2}{25\beta} \tag{2.44}$$

目标方程即 Riccati 方程 $v'=k(1-v^2)$ 有如下形式的一般解 [144]:

$$v=\frac{A-Be^{\ 2k\xi}}{A+Be^{-2k\xi}}=\begin{cases}1, & B=0\\ -1, & A=0\\ \tan h[k\xi-\frac{1}{2}\ln(B/A)], & AB>0\\ \cot h[k\xi-\frac{1}{2}\ln(-B/A)], & AB<0\end{cases}$$

其中 $A, B$ 为任意常数且满足 $A^2+B^2\neq 0$.

将 (2.43)~(2.44) 代入 (2.42) 并用 Riccati 方程的解就得到方程 (2.40) 的精确解

$$u(x,t)=\lambda+\frac{3\alpha^2}{25\beta}\mp\frac{6\alpha^2}{25\beta}\tan h[\pm\frac{\alpha}{10\beta}(x\mp\lambda t)+\xi_0]$$
$$-\frac{3\alpha^2}{25\beta}\tan h^2[\pm\frac{\alpha}{10\beta}(x\mp\lambda t)+\xi_0]$$
$$u(x,t)=\lambda+\frac{3\alpha^2}{25\beta}\mp\frac{6\alpha^2}{25\beta}\coth[\pm\frac{\alpha}{10\beta}(x\mp\lambda t)+\xi_0]$$
$$-\frac{3\alpha^2}{25\beta}\coth^2[\pm\frac{\alpha}{10\beta}(x\mp\lambda t)+\xi_0]$$

这里

$$\lambda=\pm\frac{\sqrt{288\alpha^4+10^4\beta^2c}}{50\sqrt{2}\beta},$$

$c$ 和 $\beta$ 都是积分常数. 值得注意地是,C-D 算子对的选取并不是唯一的.

看下面的一个具体例子.

**例 2.2.4** 耦合 Ito 系统和广义 Hirota-Satsuma 耦合 KdV 系统.

耦合 Ito 系统是指

$$\begin{cases}u_t-v_x\\ v_t=-(v_{xxx}+3uv_x+3vu_x)-12ww_x\\ w_t=w_{xxx}+3uw_x\end{cases}\tag{2.45}$$

而广义 Hirota-Satsuma 耦合 KdV 方程为:

$$
\begin{cases}
u_t = \dfrac{1}{4}u_{xxx} + 3uu_x + 3(-v^2 + w)_x \\
v_t = -\dfrac{1}{2}v_{xxx} - 3uv_x \\
w_t = -\dfrac{1}{2}w_{xxx} - 3uw_x
\end{cases}
\tag{2.46}
$$

Tan,Ma 和胡在文献 [142] 中用双线性方法得到了它们的 Bäcklund 变换、叠加公式和一类新的孤波解.

为求得 (2.46) 的孤波解, 作变换

$$
u(x,t) = U(\xi), v(x,t) = V(\xi), w(x,t) = W(\xi), \xi = x + \beta t
$$

并代入 (2.46) 得:

$$
\begin{cases}
\beta U' = \dfrac{1}{4}U''' + 3UU' + 3(-V^2 + W)' \\
\beta V' = -\dfrac{1}{2}V''' - 3UV' \\
\beta W' = -\dfrac{1}{2}W''' - 3UW'
\end{cases}
\tag{2.47}
$$

利用延拓齐次平衡法得到 (2.47) 的如下两个解形式

$$
\begin{cases}
u = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 \\
v = b_0 + b_1\varphi + b_2\varphi^2 \\
w = c_0 + c_1\varphi + c_2\varphi^2
\end{cases}
\tag{2.48}
$$

$$
\begin{cases}
u = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 \\
v = b_0 + b_1\varphi \\
w = c_0 + c_1\varphi
\end{cases}
\tag{2.49}
$$

将 (2.48) 代入 (2.47) 并用 Mathematica 得到如下关于 $a_i, b_i, c_i (i = 1, 2), k, \beta$ 的超定代数方程

$$\beta ka_1 + \frac{1}{2}k^3a_1 - 3ka_0a_1 + 6kb_0b_1 - 3kc_1 - 0$$

$$-3ka_1^2 + 2\beta ka_2 + 4k^3a_2 - 6ka_0a_2 + 6kb_1^2 + 12kb_0b_2 - 6kc_2 = 0$$

$$-\beta ka_1 - 2k^3a_1 + 3ka_0a_1 - 9ka_1a_2 - 6kb_0b_1 + 18kb_1b_2 + 3kc_1 = 0$$

$$3kc_1^2 - 2\beta ka_2 - 10k^3a_2 + 6ka_0a_2 \quad 6ka_2^2 - 6kb_1^2$$
$$- 12kb_0b_2 + 18kb_1b_2 + 3kc_1 = 0$$

$$\frac{3}{2}k^3a_1 + 9ka_1a_2 \quad 18kb_1b = 0$$

$$6k^3a_2 + 6ka_2^2 \quad 12kb_1^2 = 0, \beta kb_1 - k^3b_1 + 3ka_0b_1 = 0$$

$$3ka_1b_1 + 2\beta kb_2 - 8k^3b_2 + 6a_0b_2 = 0$$

$$-\beta kb_1 + 4k^3b_1 - 3ka_0b_1 + 3ka_2b_1 + 6ka_1b_2 = 0$$

$$3ka_1b_1 \quad 2\beta kb_2 + 20k^3b_2 - 6a_0b_2 + 6ka_2b_2 = 0$$

$$-3k^3b_1 - 3ka_2b_1 - 6ka_1b_2 - 0, -12k^3b_2 - 6ka_2b = 0$$

$$\beta kc_1 \quad k^3c_1 + 3ka_0c_1 = 0$$

$$3ka_1c_1 + 2\beta kc_2 - 8k^3c_2 + 6ka_0c_2 = 0$$

$$\beta kc_1 + 4k^3c_1 - 3ka_0c_1 + 3ka_2c_1 + 6ka_1c_2 = 0$$

$$3ka_1c_1 - 2\beta kc_2 + 20k^3c_2 - 6ka_0c_2 + 6ka_2c_2 = 0$$

$$-3k^3c_1 - 3ka_2c_1 - 6ka_1c_2 - 0, -12k^3c_2 - 6ka_2c_2 = 0$$

利用 Mathematica 得到如下解:

$$a_0 = \frac{1}{3}(-\beta + 4k^2), a_2 = -2k^2, b_2 - \pm k^2$$

$$c_2 = -\frac{2}{3}(2\beta k^2 \quad 2k^4 \mp 3k^2b_0), a_1 = b_1 = c_1 = 0$$

其中 $b_0, c_0, k, \beta$ 是任意常数,$\varphi' = k(1 - \varphi^2)$, 其一般解为

$$\varphi = \tan h(k\xi), \varphi = \coth(k\xi)$$

于是得到方程 (2.45) 的钟状孤子解:

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{3}(\beta - 2k^2) + 2k^2 \sec h^2[k(x + \beta t)] \\ v = b_0 \pm k^2 \mp k^2 \sec h^2[k(x + \beta t)] \\ w = c_0 - \dfrac{2k^2}{3}(2\beta - 2k^2 \mp 3b_0) \\ \qquad + \dfrac{2}{3}(2\beta k^2 - 2k^4 \mp 3k^2b_0) \sec h^2[k(x + \beta t)] \end{cases} \tag{2.50}$$

类似地将第二个 $u=Cv$ 即将 (2.49) 代入 (2.47)

$$
\begin{aligned}
&\beta ka_1+\frac{1}{2}k^3a_1-3ka_0a_1+6kb_0b_1-3kc_1=0\\
&-3ka_1^2+2\beta ka_2+4k^3a_2-6ka_0a_2+6kb_1^2=0\\
&-\beta ka_1-2k^3a_1+3ka_0a_1-9ka_1a_2-6kb_0b_1+3kc_1=0\\
&3ka_1^2-2\beta ka_2-10k^3a_2+6ka_0a_2-6ka_2^2-6kb_1^2=0\\
&\frac{3}{2}k^3a_1+9ka_1a_2=0,6k^3a_2+6ka_2a^2=0\\
&\beta kb_1-k^3b_1+3ka_0b_1=0,3ka_1b_1=0\\
&-\beta kb_1+4k^3b_1-3ka_0b_1+3ka_2b_1=0\\
&-3kb_1-3ka_2b_1-0,\beta kc_1-k^3c_1+3ka_0c_1=0\\
&3ka_1c_1=0,-3k^3c_1-3ka_2c_1=0\\
&-\beta kc_1+4k^3c_1-3ka_0c_1+3ka_2c_1=0
\end{aligned}
$$

该超定方程组有解

$$
a_0=\frac{k^4-b_1^2}{2k^2},a_1=0,a_2=-k^2,c_1=2b_0b_1,\beta=\frac{-k^4+3b_1^2}{2k^2},
$$

其中 $b_0,b_1,k\neq 0$ 是任意常数. 于是得到方程 (2.46) 的关于 $u$ 是钟状, 关于 $v,w$ 是纽状的孤子解:

$$
\begin{cases}
u=-\dfrac{k^4+b_1^2}{2k^2}+k^2\sec h^2[k(x+\dfrac{-k^{4+3b_1^2}}{2k^2})t]\\
v=b_0+b_1\tan h[k(x+\dfrac{-k^{4+3b_1^2}}{2k^2})t]\\
w=c_0+2b_0b_1\tan h[k(x+\dfrac{k^{4+3b_1^2}}{2k^2})t]
\end{cases}
\tag{2.51}
$$

注: 在 (2.50) 中, 取 $c_0=0,b_0=\pm\frac{2}{3}(\beta-k)$, 在 (2.51) 中取 $b_0=c_0=0$, 作变换 $x\to\sqrt{2}x,t\to\sqrt{2}t$, 则我们可得到 Hirota-Satsuma 方程

$$
\begin{cases}
u_t=\dfrac{1}{3}(u_{xxx}+6uu_x)-6vv_x\\
v_t=-v_{xxx}-3uv_x
\end{cases}
$$

的孤子解是：

$$
\begin{cases}
u=\dfrac{1}{3}\left(\beta-2k^{2}\right)+2k^{2}\sec h^{2}\left[\dfrac{k}{\sqrt{2}}(x+\beta t)\right]\\
v=\pm(2\beta+k^{2})\mp\sec h^{2}\left[\dfrac{k}{\sqrt{2}}(x+\beta t)\right]
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
u=-\dfrac{k^{4}+b_{1}^{2}}{2k^{2}}+k^{2}\sec h^{2}\left[\dfrac{k}{\sqrt{2}}\left(x+\dfrac{-k^{4}+3b_{1}^{2}}{2k^{2}}t\right)\right]\\
v=b_{1}\tan h\left[\dfrac{k}{\sqrt{2}}\left(x+\dfrac{-k^{4}+3b_{1}^{2}}{2k^{2}}t\right)\right]
\end{cases}
$$

为求耦合 Ito 系统 (2.45) 的孤子解，令

$$
u(x,t)=U(\xi),v(x,t)=V(\xi),w(x,t)=W(\xi),\xi=x+\beta t
$$

代入 (2.45) 得到如下常微分方程表示形式：

$$
\begin{aligned}
&\beta U'=V',\beta W'=W'''+3UW'\\
&\beta V'=-(V'''+3UV'+3VU')+12WW'
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

利用改进的齐次平衡法得到如下二个假设：

$$
u=a_0+a_1\varphi+a_2\varphi^2,v=b_0+b_1\varphi+b_2\varphi^2,w=c_0+c_1\varphi+c_2\varphi^2 \tag{2.53}
$$

和

$$
u=a_0+a_1\varphi+a_2\varphi^2,v=b_0+b_1\varphi+b_2\varphi^2,w=c_0+c_1\varphi \tag{2.54}
$$

将 (2.53) 代入 (2.52) 得到下面代数系统

$$
\begin{aligned}
&\beta ka_1-kb_1=0,2\beta ka_2-2kb_2=0\\
&-\beta ka_1+kb_1=0,2\beta ka_2+2kb_2=0\\
&6ka_1b_0+\beta kb_1-4k^3b_1+6ka_0b_1+12kc_0c_0=0\\
&12ka_2b_0+12ka_1b_1+2\beta kb_2-32k^3b_2+12ka_0b_2\\
&+12kc_1^2+24kc_0c_2=0
\end{aligned}
$$

$$-6ka_1b_0 - \beta kb_1 + 16k^3b_1 - 6ka_0b_1 + 18ka_2b_1$$
$$+18ka_1b_2 - 12kc_0c_1 + 36kc_1c_2 = 0,$$
$$-12ka_2b_0 - 12ka_1b_1 - 2\beta kb_2 + 80k^3b_2$$
$$-12a_0b_2 + 24ka_2b_2 - 12kc_1^2 - 24kc_0c_1 + 24kc_2^2 = 0$$
$$-12k^3b_1 - 18ka_2b_2 - 18ka_1b_2 - 36kc_1c_2 = 0$$
$$-48k^3b_1 - 24ka_2b_2 - 24kc_2^2 = 0, \beta kc_1 + 2k^3c_1 - 3ka_0c_1 = 0$$
$$-3ka_1c_1 + 2\beta kc_2 + 16k^3c_2 - 6ka_0c_2 = 0$$
$$-\beta kc_1 - 8k^3c_1 + 3ka_0c_1 - 3ka_2c_1 - 6ka_1c_2 = 0$$
$$3ka_1c_1 - 2\beta kc_2 - 40k^3c_2 + 6ka_0c_2 - 6ka_2c_2 = 0$$
$$6k^3c_1 + 3ka_2c_1 + 6ka_1c_2 = 0, 24k^3c_2 + 6ka_2c_2 = 0$$

解之得:

$$a_1 = b_1 = c_1 = 0, \quad a_0 = \frac{64k^6 - c_2^2}{24k^4}, \quad a_2 = -4k^2$$
$$b_0 = \frac{64k^6c_0c_1 - c_2^4}{128k^8}, \quad b_2 = \frac{c_2^2}{2k^2}, \quad \beta = -\frac{c_2^2}{8k^4}$$

其中 $c_0, c_2, k \neq 0$ 是任意常数, 于是我们得到耦合 Ito 系统 (2.45) 的孤子解

$$u = -\frac{32k^6 + c_2^2}{24k^4} + 4k^2 \operatorname{sec} h^2 \left[k\left(x - \frac{c_2^2}{8k^4}t\right)\right]$$
$$v = \frac{64k^6c_0c_2 + 64k^6c_2^2 - c_2^4}{128k^8} - \frac{c_2^2}{2k^2} \operatorname{sec} h^2 \left[k\left(x - \frac{c_2^2}{8k^4}t\right)\right]$$
$$w = c_0 + c_2 - c \operatorname{sec} h^2 \left[k\left(x - \frac{c_2^2}{8k^4}t\right)\right]$$

类似地, 将第二个假设 (2.54) 代入 (2.52) 得到代数方程组

$$\beta ka_1 - kb_1 = 0, 2\beta ka_2 - 2kb_2 = 0$$
$$-\beta ka_1 + kb_1 = 0, -2\beta a_2 + 2kb_2 = 0$$
$$6ka_1b_0 + \beta kb_1 - 4k^3b_1 + 6ka_0b_1 + 12kc_0c_1 = 0$$
$$-6ka_1b_0 - \beta kb_1 + 16k^3b_1 - 6ka_0b_1 + 18ka_2b_1 + 18ka_2b_2$$
$$- 12kc_0c_1 = 0$$
$$-12ka_2b_0 - 12ka_1b_1 - 2\beta kb_2 + 80k^3b_2 - 12ka_0b_2 + 24ka_2b_2$$
$$- 12kc_1^2 = 0$$
$$12ka_2b_0 + 12ka_1b_1 + 2\beta kb_2 - 32k^3b_2 + 12ka_0b_2 + 12kc_1^2 = 0$$

$$-12k^3b_1 - 18ka_2b_1 - 18ka_1b_2 = 0, -48k^3b_2 - 24ka_2b_2 = 0$$
$$\beta kc_1 + 2k^3c_1 - 3ka_0c_1 = 0, \quad 3ka_1c_1 = 0, 6k^3c_1 + 3ka_2c_1 = 0$$
$$-\beta kc_1 - 8k^3c_1 + 3ka_0c_1 - 3ka_2c_1 = 0$$

解之得:

$$a_0 = \frac{4k^4 - b_2}{6k^2}, b_0 = \frac{4k^2c_1^2 - b_2^2 - 8k^4b_2}{8k^4},$$
$$c_0 = b_1 = a_1 = 0, a_2 = -2k^2, \beta = -\frac{b_2}{2k^2}$$

其中 $c_1, b_2, k \neq 0$ 是任意常数. 于是得到 (2.45) 的孤子解:

$$u = -\frac{b_2 + 8k^4}{6k^2} + 2k^2 \sec h^2 \left[k\left(x - \frac{b_2}{2k^2}t\right)\right]$$
$$v = \frac{4k^2c_1^2 - b_2^2}{8k^4} - b_2 \sec h^2 \left[k\left(x - \frac{b_2}{2k^2}t\right)\right]$$
$$w = c_1 \tan h \left[k\left(x - \frac{b_2}{2k^2}t\right)\right]$$

文献 [69,70] 将假设与齐次平衡法, 又作了进一步改进, 具体地说就是将假设

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi^i, \varphi' = k\left(1 \pm \varphi^2\right)$$

改写为

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^{m} \cos w^{i-1}(\xi)\left[A_i \sin w(\xi) + B_i \cos w(\xi)\right] + A_0$$

$$w' = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\xi} = \sin w$$

由此得到了一类孤子方程的钟状、扭状、周期解. 利用这种方法, 下面求得了 BBM 方程的钟状孤子解.

**例 2.2.5** BBM 方程是指

$$u_t + u_x + uu_x + pu_{xxt} = 0 \tag{2.55}$$

设

$$u(x,t) = u(z), z = x + Ct$$

代入 (2.55) 得 ODE:

$$(1+C)\,u+\frac{1}{2}u^2+pCu''=0 \tag{2.56}$$

设 (2.56) 有如下形式的解:

$$u\,(z)=\sum_{i=0}^{n}\sin^{i}T\,(z)\,[A_i\sin T\,(z)+B_i\cos T(z)]+a_0 \tag{2.57}$$

利用改进的齐次平衡法可确定 $n=2$, 此时 (2.57) 改写为:

$$u\,(z)=A\sin^2 T+B\sin T\cos T+D \tag{2.58}$$

其中 $A,B,D$ 为待定常数, 目标方程的取法有两种情形.

情形 1:

取

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}=\sin T \tag{2.59}$$

将 (2.58)~(2.59) 代入 (2.55) 并分别令 $\sin^i T,\cos^j T(i=0,1,2,3;j=0,1)$ 的系数为零得到下面的代数方程组

$$\begin{aligned}
&A(1+C)+\frac{1}{2}(B^2+2AD)+4ApC=0\\
&B(1+C)+BD+BpC=0\\
&\frac{1}{2}(A^2-B^2)-6ApC=0\\
&(1+C)D+\frac{1}{2}D^2=0
\end{aligned}$$

利用吴代数消元法得:

a) $\quad B=D=0,\quad A=-\dfrac{12p}{4p+1},\quad C=-\dfrac{1}{4p+1}$

b) $\quad B=0,\quad C=\dfrac{1}{4p-1},\quad A=\dfrac{12p}{4p-1},\quad D=-\dfrac{8p}{4p-1}$

故得方程 (2.55) 的钟状孤子解为:

$$u(x,t)=-\frac{48p}{4p+1}\operatorname{sec}h^2 z,\quad z=x-\frac{1}{4p+1}t$$

$$u(x,t)=\frac{48p}{4p-1}\operatorname{sec}h^2 z-\frac{8p}{4p-1},\quad z=x+\frac{1}{4p+1}t$$

情形 2:

取

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}=\cos T \tag{2.60}$$

将 (2.58),(2.60) 代入 (2.56) 得到如下代数方程组

$$\begin{aligned}&A(1+C)+\frac{1}{2}(B^2+2AD)-8ApC=0\\&B(1+C)+BD-5BpC=0\\&\frac{1}{2}(A^2-B^2)+6ApC=0,\ AB+6BpC=0\\&(1+C)D+\frac{1}{2}D^2+2ApC=0\end{aligned}$$

利用吴代数消元法得:

c) $\quad B=0,\ A=\dfrac{-12p}{4p-1},\ C=\dfrac{1}{4p-1},\ D=\dfrac{4p}{4p-1}$

d) $\quad B=0,\ A=\dfrac{12p}{4p+1},\ C=-\dfrac{1}{4p+1},\ D=-\dfrac{12p}{4p+1}$

故得 BBM 方程 (2.55) 的另一种钟状孤子解表示形式:

$$u(x,t)=-\frac{12p}{4p-1}\tan h^2 z+\frac{4p}{4p-1},\quad z=x+\frac{1}{4p-1}t$$

$$u(x,t)=\frac{12p}{4p+1}\tan h^2 z-\frac{12p}{4p+1},\quad z=x-\frac{1}{4p+1}t$$

### 2.2.4 参数假设法

这种方法的基本思想是：令 $u=Cv$ 代入 $Au=0$ 得 $Dv=0$, 解该超定代数方程组, 再代入 $u=Cv$ 的原方程的解. 具体地说, 这种方法是将 PDEs 通过恰当的变换先化为 ODEs, 再将 ODEs 的一般解表示为:

$$u(\xi)=\frac{Ae^{k(\xi+\xi_0)}}{1+e^{k(\xi+\xi_0)}}+D,\ u(z)=\frac{Ae^{k(\xi+\xi_0)}}{(1+e^{k(\xi+\xi_0)})^2+Be^{k(\xi+\xi_0)}}+D$$

其中 $\xi, z$ 均为 $x+Ct$ 的函数. 然后将其代入 ODEs 确定出待定常数. 仍以上例 2.2.5 为例说明这种方法. 令

$$u=\frac{Ay}{(1+y)^2},\ y=e^{kz}$$

代入 (2.56) 整理得

$$2(1+C)(1+y)^2+Ay+2pCk^2(1-4y+y^2)=0$$

令 $y$ 的各幂次项系数为零得到代数方程组:

$$1+C+pCk^2=0,\ 4(1+C)+A-pCk^2=0$$

解之得:

$$A=-\frac{12pk^2}{pk^2+1},\ \ C=-\frac{1}{pk^2+1}$$

故得方程 (2.55) 的钟状孤子解为:

$$u(x,t)=-\frac{12pk^2e^{kz}}{(1+e^{kz})^2},\ \ z=x-\frac{1}{pk^2+1}t$$

## 2.2.5 屠规彰格式法

先介绍一下屠格式. 由等谱问题 $\psi_x=u\psi, \lambda_t=0$ 与方程 $V_x=[U,V]$ 的解, 可以导出零曲率方程 $U_t-V_x^{(n)}+[U,V^{(n)}]=0$ 及相应的可积系

$$u_t=JL^nf(u),\quad n\geq 1 \tag{2.61}$$

其中 $J$ 是一个辛算子. 再利用迹恒等式, 把 (2.61) 式改写成广义 Hamilton 形式

$$u_t=JL^nf(u)=J\frac{\delta H_n}{\delta u},\quad n\geq 1$$

上述步骤称为屠规彰格式, 简称屠格式, 该格式就是 C-D 对

$$\begin{cases} Cv=u \\ Dv=0 \end{cases}$$

的相容性即为 $Au=0$. 这里就是由

$$
\begin{cases}
\psi_x = U\psi \\
\psi_t = V^{(n)}\psi
\end{cases}
$$

的相容性 $\psi_{xt}=\psi_{tx}$ 得到零曲率方程, 即孤子谱系 (2.61), 其中 $V^{(n)}$ 是伴随表示方程 $V_x=[U,V]$ 的一个解. 这种方法的关键在于确定 C-D 对中的 D 算子, 即适当的 $V^{(n)}$.

**例 2.2.6** 考虑等谱问题

$$
\psi_x = U\psi, U = \begin{pmatrix} v & -\lambda+u+1 \\ -\lambda+u-1 & -v \end{pmatrix} \tag{2.62}
$$

取

$$
V^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} \begin{pmatrix} a_m\lambda^{n-m}+\dfrac{1}{v}a_{n+1} & (b_m+c_m)\lambda^{n-m} \\ (b_m-c_m)\lambda^{n-m} & -a_m\lambda^{n-m}-\dfrac{1}{v}a_{n+1} \end{pmatrix}
$$

即取

$$
\psi_t = V^{(n)}\psi
$$

则 (2.62) 的相容性条件为 $U_t - V_x^{(n)} + [U,V^{(n)}]=0$. 也就是非线性演化方程族

$$
\begin{cases}
u_t = \partial_x \dfrac{1}{v}a_{n+1} \\
v_t = \dfrac{1}{v}b_{n+1x}
\end{cases}
$$

特别地, 由 C-D 对

$$
\begin{cases}
\psi_x = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda+u+1 \\ -\lambda+u-1 & -1 \end{pmatrix}\psi \\
\psi_t = \begin{pmatrix} -\lambda-u-u_x-u^2 & \lambda^2-\lambda-u \\ \lambda^2+\lambda+u & \lambda+u+u_x+u^2 \end{pmatrix}\psi
\end{cases}
$$

的相容性导出 $u_t=u_{xx}+2uu_x$. 即为著名的 Burgers 方程.

## 2.2.6 吴代数消元法

这种方法将 $B$、$C$、$D$ 设成待定算子, 将问题归结为求解代数方程族. 然后利用吴方法求解此代数方程组. 下面分两种情况求 C-D 对.

情形 1: 已知算子 $D$, 求变换算子 $C$.

设待求解方程为 $Au=0$, 寻找算子 $C$ 使得 $AC=BD$, 将原方程 $Au=0$ 的求解问题化为求解目标方程 $Dv=0$, 这里假定 $Dv=0$ 是已知的. 具体一点说, 设 $u=Cv=f(v,\partial v,\cdots)$ 代入原方程 $Au=0$ 得到关于 $v$ 及其偏导数的一个微分多项式 $Hf$, 利用微分伪带余除法, 用 $Hf$ 除以 $Dv$ 得

$$Hf=BDv+R$$

令 $R=0$ 得到一超定方程组. 求之可得 $f$, 也就是得到变换 $C$, 且 $AC=BD$. 于是原方程 $Au=0$ 化为 $Dv=0$.

**例 2.2.7** Whitham-Broer-Kaup 浅水波方程

$$\begin{cases} u_t+uu_x+v_x+\eta u_{xx}=0 \\ v_t+(uv)_x+\delta u_{xxx}-\eta v_{xx}=0 \end{cases} \tag{2.63}$$

设

$$u=f(w,w_x), v=g(w,w_x,w_{xx}) \tag{2.64}$$

且 $w$ 满足

$$w_t-\lambda w_{xx}=0 \tag{2.65}$$

其中 $\lambda$ 为待定常数. 将 (2.64),(2.65) 代入 (2.63) 并用微分伪带余除法得到:

$$\begin{aligned} R= & (ff_w+g_w)w_x+\eta f_{ww}w_x^2+[ff_{w_x}+g_{w_x}+(\lambda+\eta)f_w \\ & +2\eta f_{ww_x}w_x]w_{xx}+\eta f_{w_xw_x}w_{xx}^2+[(\eta+\lambda)f_{w_x}+g_{w_{xx}}]w_{xxx} \end{aligned} \tag{2.66}$$

令

$$(\eta+\lambda)f_{w_x}+g_{w_{xx}}=0$$

由此得

$$g=-(\eta+\lambda)f_{w_x}w_{xx}+G(w,w_x)$$

代入 (2.66), 由 $1, w_{xx}.w_{xx}^2$ 的线性无关性得

$$\begin{cases} f_{w_xw_x}=0 \\ ff_{w_x}+G_{w_x}+(\eta+\lambda)f_w+(\eta-\lambda)f_{ww_x}w_x=0 \\ ff_ww_x+\eta f_{ww}w_x^2+G_ww_x=0 \end{cases} \tag{2.67}$$

由 (2.67) 第一式得

$$f=F(w)w_x+H(w)$$

代入 (2.67) 的后二式得

$$G=\alpha(w)w_x^2+\beta(w)w_x+\gamma(w)$$

再代入后二式, 并由 $1, w_x, w_x^2$ 线性无关得方程组

$$HF+\beta+(\lambda+\eta)H'=0,\quad F^2+2\eta F'+2\alpha=0$$

$$FF'+\eta F''+\alpha'=0,(HF)'+\eta F''+\beta'=0,HH'+\gamma'=0$$

解之得

$$H=\beta=\gamma=0,\quad F^3+2\eta F'+2\alpha=0$$

于是

$$f=-2\lambda w^{-1}w_x,g=2\lambda(\lambda+\eta)w^{-1}w_{xx}-2\lambda(\lambda+\eta)w^{-2}w_x^2$$

且 $AC=BD$ 且 $B0=0$, 所以原方程就化为热传导方程 (2.65).

情形 2: 算子 $D$ 未知, 求算子 $C$.

对于该情形, 作如下处理: 令

$$u=f(v,\partial v,\cdots)$$

代入原方程 $Au=0$, 得到关于 $v$ 及其偏导数的微分多项式 $Dp$.

(i) 在得到的 $Dp$ 中, 找出与其他项的独立项, 并令其系数为零, 得到一方程组, 求解. 如果从某个方程解出 $f$ —const., 则该项必在目标方程 $D$ 中. 由此可得到 $f$ 的可能表达式; 再代入原方程, 找出与其他项的独立项, 令其系数为零, 并解方程. 如此继续下去即可解出 $f$, 即得到算子 $C$.

(ii) 将 $f$ 代入原方程, 找出独立项, 并令其系数为零, 再利用相容性条件, 即可得到目标方程 $Dv=0$.

利用这种方法, 可求出如下弹性力学方程组的算子对 $C$ 和 $D$.

**例 2.2.8** 考虑

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=0 \\ \Delta(\sigma_x+\sigma_y)=0 \end{cases} \tag{2.68}$$

其中 $\Delta$ 为 Laplace 算子.

设

$$\sigma_x=f(v,v_x,v_y,v_{xx},v_{xy},v_{yy})$$

$$\sigma_y=g(v,v_x,v_y,v_{xx},v_{xy},v_{yy})$$

$$\tau_{xy}=h(v,v_x,v_y,v_{xx},v_{xy},v_{yy})$$

代入 (2.68) 的第一式可得:

$$\begin{aligned} f_v v_x+h_v v_y+f_{v_x}v_{xx}+h_{v_y}v_{yy}+(f_{v_y}+h_{v_x})v_{xy}+(h_{v_{xx}} \\ +f_{v_{xx}})v_{xxy}+(f_{v_{yy}}+h_{v_{yy}})v_{xyy}+f_{v_{xx}}v_{xxx}+h_{v_{yy}}v_{yyy}=0 \end{aligned} \tag{2.69}$$

由 $v_{xxx},v_{xxy},v_{yyx},v_{yyy}$ 线性无关知:

$$h_{v_{xx}}+f_{v_{xy}}=0,f_{v_{yy}}+h_{v_{yy}}=0,f_{v_{xx}}=0,h_{v_{yy}}=0$$

同理可得:

$$g_{v_{xy}} + h_{v_{yy}} = 0, f_{v_{yy}} + h_{v_{xy}} = 0, g_{v_{yy}} = 0, h_{v_{xx}} = 0$$

将上述结果代入 (2.69) 得:

$$f_v v_x + h_v v_y + f_{v_x} v_{xx} + h_{v_y} v_{yy} + (f_{v_y} + h_{v_x}) v_{xx} = 0$$

在上式中 $v_{xx}$ 独立于其他各项, 所以 $f_{v_x} = 0$, 再代入 (2.68) 的第二式得: $g_{v_y} = 0$, 于是有

$$\begin{aligned} &f = u(v) v_{yy} + F(v, v_y), g = u(v) v_{xx} + G(v, v_x) \\ &h = -u(v) v_{xy} + H(v. v_x, v_y) \end{aligned}$$

代入 (2.68) 的第二式得到:

$$F_v v_x + H_v v_y + (u' v_x + H_{v_y}) v_{yy} + (F_v - u' v_y + H_{v_x}) v_{xy} = 0$$

由 $1, v_{yy}, v_{xy}$ 的相互独立性得:

$$F_v v_x + H_v v_y = 0, u' v_x + H_{v_y} = 0, F_{v_y} - u' v_y + H_{v_x} = 0 \quad (2.70)$$

同理得:

$$g_v v_y + H_v v_x = 0, u' v_y + H_{v_x} = 0, G_{v_x} - u' v_x + H_{v_y} = 0 \quad (2.71)$$

求解 (2.70) 和 (2.71) 得到一组特解:

$$u = \frac{1}{2} k_1 v^2 + k_2, F = k_1 v v_y^2 + \alpha_1, G = k v v_x^2 + \alpha_2, H = -k v v_x v_y + \alpha_3$$

其中 $k_i, \alpha_i$ 为常数. 代入 (2.68) 式的第三式则得目标方程 $D$.
当 $k_2 = 1, k_1 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ 时,

$$f = v_{xx}, g = v_{yy}, h = -v_{xy}$$

故算子 $D$ 为:

$$\Delta^2 v = 0$$

### 2.2.7 物理方法

$AC = BD$ 思想不仅渗透在数学研究领域中, 而且在物理学特别是电磁场理论中也表现突出, 用这种思想来描述物理定律能使我们了解知识点的来龙去脉, 当然也可由一种运动形式推出另一种运动形式.

**例 2.2.9** 由 Cartan 结构方程导出 Bianchi 恒等式 (或齐次场方程).

设 $w$ 表示主丛 $p$ 上的联络 1 次形式 (称为势), 则相应的场强是 $\Omega$, 由 Cartan 结构方程 $\Omega = dw + \frac{1}{2}[w, w](Au = 0)$ 可取算子 $C = d$(即外微分), 即 $u = C\Omega$, 则

$$
\begin{aligned}
Au = AC\Omega = d\Omega - d(dw + \frac{1}{2}[w, w]) = d\Omega - d^2w - \frac{1}{2}([dw, w] \\
-[w, dw]) = d\Omega - [dw, w] = d\Omega - [\Omega^w, w] = 0
\end{aligned}
$$

即 $d\Omega = [\Omega^w, w]$, 这就是齐次场方程.

**例 2.2.10** 由电荷守恒定律推出 Maxwell 方程组的数学形式.

物理学中已经定义电流向量场 $\Gamma$ 和磁流向量场 $\Xi$ 为:

$$\Gamma = J^i\partial_i = i_\Gamma u, \quad \Xi = G^i\partial_i$$

作用外微分算子 $d$ 得

$$d(i_\Gamma\mu) = d(J^i\partial_i) = \partial_i J^i\mu = (\nabla j + \partial_t\rho)\mu \tag{2.72}$$

$$d(i_\Gamma\mu) = d(J^i\partial_i) = \partial_i J^t\mu = (\nabla j + \partial_t\rho)\mu \tag{2.73}$$

由电荷守恒定律

$$\nabla j + \partial_t\rho = 0 \Rightarrow d(i_\Gamma\mu) = 0$$

由磁荷守恒定律

$$\nabla G + \partial_t g = 0 \Rightarrow d(i_\Xi\mu) = 0$$

于是

$$i_\Gamma\mu = J^i\mu_i = (\partial_j H^{ji})\mu_i \Rightarrow J^i = \partial_j H^{ji} \tag{2.74}$$

$$i_\Xi\mu = G^i\mu_i = (\partial_j F^{ji})\mu_i \Rightarrow G^i = \partial_j F^{ji} \tag{2.75}$$

(2.74) 和 (2.75) 就是 Maxwell 方程组的数学表示形式.

### 2.2.8 推广的 Tanh- 函数法

从前面的例子可以发现, 不同的方法得到不同形状的孤立子解. 有一个值得思考的问题是: 能不能用一个尽可能统一的方法求出非线性发展方程的尽可能多的不同形式的解? 这一点并未完全做到, 但是利用推广的 Tanh- 函数方法, 可同时得到某些孤立子方程 (组) 的不同形式的解, 比如: 扭状解、奇异解、有理分式解和周期解.

所谓 Tanh- 函数法是指, 对于两个变量的 PDEs:

$$H(u, u_t, u_x, u_{xx}, \cdots) = 0$$

寻找形式解

$$u(x,t) = u(Z) = \sum_{i=0}^{m} a_i w^i$$

其中,$w(x,t) = \tan(hkZ), Z = x + ct, m$ 是待定正整数.

推广的 Tanh- 函数法是借用 Riccati 方程

$$w' = b + w^2$$

Riccati 方程随参数 $b$ 的符号不同可以得到不同形式的解:

$$w = \begin{cases} -\sqrt{-b}\tanh\sqrt{-b}z & b < 0 \\ -\sqrt{-b}\coth\sqrt{-b}z & b < 0 \\ \sqrt{b}\tanh\sqrt{b}z & b > 0 \\ -\sqrt{b}\coth\sqrt{b}z & b > 0 \\ w = -\dfrac{1}{z} & b = 0 \end{cases}$$

借助于 $b$ 的符号变化. 利用形式解就得到 PDEs 方程的不同形式的精确解. 并且利用推广的 Tanh- 函数法, 还可以求出平衡数 $m$ 不是正整数时的行波解.

**例 2.2.11** 考虑 Burgers-Huxley 方程

$$u_t + puu_x - u_{xx} + qu(u-1)(u-s) = 0 \tag{2.76}$$

其中 $p, q$ 和 $s$ 为实参数且 $p^2 + q^2 \neq 0$.

我们作变换

$$u(x,t) = U(\xi), \quad \xi = x + ct$$

将方程 (2.76) 化成一常微分方程

$$cU' + pUU' - U'' + qU(U-1)(U-s) = 0 \tag{2.77}$$

$U''$ 与 $U^3$ 或 $UU'$ 平衡可得 $m = 1$, 因此可选取

$$U = a_0 + a_1\varphi \tag{2.78}$$

将 (2.78) 代入 (2.77) 得到关于 $a_0, a_1, b, c$ 的一代数方程组

$$\begin{aligned}
&qa_1^3 + pa_1^2 - 2a_1 = 0\\
&a_1c + qa_1^2(a_0 - s) + qa_1^2(2a_0 - 1) + pa_0a_1 = 0\\
&-2a_1b + qa_1(2a_0 - 1)(a_0 - s) + qa_0a_1(a_0 - 1) + pa_1^2b = 0\\
&a_1bc + pa_0a_1b + qa_0(a_0 - 1)(a_0 - s) = 0
\end{aligned} \tag{2.79}$$

讨论两种情况

(i) 当 $q \neq 0$ 时, 方程 (2.79) 的解为

$$a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{-p \pm r}{2q}, c = \frac{(-p \pm r)(2s-1) - 2p}{4}, b = -\frac{1}{4a_1^2} \tag{2.80}$$

$$a_0 = \frac{s}{2}, a_1 = \frac{-p \pm r}{2q}, c = \frac{(-p \pm r)(2-s) - 2ps}{4}, b = -\frac{s^2}{4a_1^2} \tag{2.81}$$

$$a_0 = \frac{s+1}{2}, a_1 = \frac{-p \pm r}{2q}, c = \frac{-(p \pm r)(s+1)}{4}, b = -\frac{(s-1)^2}{4a_1^2} \quad (2.82)$$

其中 $r = \sqrt{p^2 + 8q}$. 由于 $b \leq 0$. 得到 Burgers-Huxley 方程的行波解为

$$\begin{aligned}
u_{1,2} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tanh[\frac{q}{-p \pm r}(x + \frac{(-p \pm r)(2s-1) - 2p}{4}t)] \\
u_{3,4} &= \frac{s}{2} - \frac{s}{2}\tanh[\frac{qs}{-p \pm r}(x + \frac{(-p \pm r)(2-s) - 2ps}{4}t)] \\
u_{5,6} &= \frac{s+1}{2} - \frac{s+1}{2}\tanh[\frac{q(s-1)}{-p \pm r}(x + \frac{(-(p \pm r)(s+1) - 2p}{4}t)] \\
u_{7,8} &= \frac{p \pm r}{q[2x - (p \pm r)t]}, \quad (s = 0) \\
u_{9,10} &= 1 + \frac{p \pm r}{q[2x + (p \pm r)t]}, \quad (s = 1)
\end{aligned}$$

在特殊情况 $p = 0, q = 1$ 下, 这些解恰满足 Fitahugh-Nagumo 方程

$$u_t - u_{xx} + u(u-1)(u-s) = 0$$

(ii) 当 $q = 0, p \neq 0$ 时, 方程 (2.79) 的解为

$$a_0 = -\frac{c}{p}, \quad a_1 = \frac{2}{p}$$

其中 $b, c$ 为任意常数. 通过计算可以得到 Burgers 方程

$$u_t + puu_x - u_{xx} = 0$$

的行波解:

$$\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{c}{p} - \frac{2}{p}\sqrt{-b}\tanh\sqrt{-b}(x+ct) & b < 0 \\
u_2 &= -\frac{c}{p} - \frac{2}{p(x+ct)} & b = 0 \\
u_3 &= -\frac{c}{p} + \frac{2}{p}\sqrt{b}\tanh\sqrt{b}(x+ct) & b > 0
\end{aligned}$$

**例 2.2.12**　考虑广义 Prochhammer-Chree 方程 (PC 方程)

$$u_{tt}-u_{ttxx}+ru_{xxt}-(a_1u+a_2u^2+a_3u^3)_{xx}=0,(r\neq 0) \tag{2.83}$$

我们作变换

$$u(x,t)=U(Z),\quad Z=x+ct$$

将方程 (2.83) 化成一常微分方程

$$c^2U^{(4)}-c^2U''-crU'''+(a_1u+a_2U^2+a_3U^3)_{xx}=0 \tag{2.84}$$

$U^{(4)}$ 与 $(U^3)_{xx}$ 平衡可得 $m=1$, 因此可选取

$$U=b_0+b_1w \tag{2.85}$$

将 (2.85) 代入 (2.84) 得到关于 $b_0,b_1,b$, 的一代数方程组

$$\begin{aligned}&24b_1c^2+12a_3b_1^3=0\\&a_2b_1^2+3a_3b_0b_1^2-rb_1=0\\&a_1b_1+2a_2b_0b_1^2+3a_3b_0^3b_1+9a_3b_1^3b-b_1c^2+20b_1b=0\\&b(a_2b_1^2+3a_3b_0b_1^2)-rb_1b=0\\&b^2(a_2b_1^2+3a_3b_0b_1^2)-rb_1b^2=0\\&b(a_1b_1^2+2a_2b_0b_1+3a_3b_0^3b_1)+3a_3b_1^3b^2-b_1bc^2+8b_1b^2=0\end{aligned} \tag{2.86}$$

解之得:

$$\begin{aligned}&b_0=\frac{r}{3a_3}\sqrt{-\frac{a_3}{2}}\varepsilon c-\frac{a_2}{3a_3}\\&b_1=\frac{-2}{a_3}\varepsilon c\\&b=\frac{1}{2}(c^2-a_1-2a_2b_0-3a_3b_0^3)\end{aligned} \tag{2.87}$$

其中 $\varepsilon=\pm 1$.

(i) 当 $c^2<a_1+2a_2b_0+3a_3b_0^3$ 时, 方程 (2.83) 的扭状解为

$$u_1=\frac{r}{3a_3}\sqrt{-\frac{a_3}{2}}\varepsilon c-\frac{a_2}{3a_3}-\sqrt{\frac{-2}{a_3}}\varepsilon c\tanh k(x+ct)$$

其中 $k=\sqrt{\frac{1}{2}(a_1+2a_2b_0+3a_3b_0^3-c^2)}$.

(ii) 当 $c^2=a_1+2a_2b_0+3a_3b_0^3$ 时, 方程 (2.83) 的有理分式解为

$$u_2=\frac{r}{3a_3}\sqrt{-\frac{a_3}{2}}\varepsilon c \quad \frac{a_2}{3a_3}-\sqrt{\frac{-2}{a_3}}\varepsilon ck\frac{1}{x+ct}$$

(iii) 当 $c^2>a_1+2a_2b_0+3a_3b_0^3$ 时, 方程 (2.83) 的有理分式解为

$$u_3=\frac{r}{3a_3}\sqrt{-\frac{a_3}{2}}\varepsilon c-\frac{a_2}{3a_3}-\sqrt{\frac{-2}{a_3}}\varepsilon ck'\tan k'(x+ct)$$

其中 $k'=\sqrt{\frac{1}{2}(-a_1-2a_2b_0-3a_3b_0^3+c^2)}$.

**例 2.2.13** 考虑 Boussinesq 方程组

$$\begin{cases} u_t+v_x+uu_x+su_{xx}=0 \\ v_t+(uv)_x+rv_{xx}+pu_{xxx}=0 \end{cases} \tag{2.88}$$

我们作变换

$$u(x,t)=U(Z), v(x,t)=V(Z), Z=x+ct$$

将方程 (2.88) 化成一常微分方程组

$$\begin{cases} cU'+V'+UV'+sU''=0 \\ cV'+(UV)'+rV''+pU'''=0 \end{cases} \tag{2.89}$$

通过 $U''$ 与 $UU'$,$U'''$ 与 $(UV)'$ 平衡, 可得到如下假设:

$$U=b_0+b_1w, \quad V=a_0+a_1w+a_2w^2$$

代入 (2.88) 得到代数方程组

$$
\begin{aligned}
&b_1^2+2sb_1+2a_2=0\\
&b_0b_1+cb_1+a_1=0\\
&a_1b_1+2a_2b_0b_1^2+3a_3b_0^3b_1+9a_3b_1^3b-b_1c^2+20b_1b=0\\
&2a_2b+b_1^2b+2sb_1b=0\\
&cb_1b_1+b_0b_1b+a_1b=0\\
&6pb_1+6ra_2+3a_2b_1=0\\
&2a_2b_0+2b_1a_1+2ra_1+2ca_2=0\\
&a_0b_1+a_1b_0+3a_3a_2bb_1+a_1c+8ra_2b+8pb_1b=0\\
&2ra_1b+2a_2b_0b+2a_1b_1b+2a_2bc=0\\
&a_1b_0b+2pb_1b^2+2ra_2b^2+a_1bc+a_0b_1b-0=0
\end{aligned}
\tag{2.90}
$$

解之得:

$$
\begin{cases}
b_0=-c\\
b_1=-r-s\pm\sqrt{(r-s)^2+4p}\\
a_1=0\\
a_2=rs-r^2-2p\pm r\sqrt{(r-s)^2+4p}\\
a_0=(rs-r^2-2p\pm r\sqrt{(r-s)^2+4p})b
\end{cases}
\tag{2.91}
$$

其中 $b$ 为任意常数.

(i) 当 $b<0$ 时, 方程 (2.88) 的扭状解为

$$
\begin{cases}
u_1=-c-(-r-s\pm\sqrt{(r-s)^2+4p})\times\sqrt{-b}\tanh\sqrt{-b}z\\
v_1=a_0-a_2b\tanh^2\sqrt{-b}z
\end{cases}
$$

(ii) 当 $b=0$ 时, 方程 (2.88) 的有理分式解为

$$
\begin{cases}
u_2=-c+\dfrac{1}{z}(-r-s\pm\sqrt{(r-s)^2+4p})\\
v_2=a_0+\dfrac{a_2}{z^2}
\end{cases}
$$

(iii) 当 $b>0$ 时, 方程 (2.88) 的周期解为

$$
\begin{cases}
u_3=-c+(-r-s\pm\sqrt{(r-s)^2+4p})\times\sqrt{b}\tanh\sqrt{b}z\\
v_3=a_0+a_2b\tanh^2\sqrt{b}z
\end{cases}
$$

另外，构造算子 $B$、$C$、$D$ 的机械化算法常用的还有代数几何方法、变分方法、Lie 群方法等方法.

## 2.3 C-D 对与 Darboux 变换

对于给定的 C-D 可积系统

$$\begin{cases} C(u_n, \varphi_n) = 0 \\ D(u_n, \varphi_n) = 0 \end{cases}$$

若存在变换

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n, \varphi_n) \\ \varphi_{n+1} = g(u_n, \varphi_n) \end{cases} \tag{2.92}$$

使得 C-D 系统形式不变, 则称 (2.92) 为 (广义)Darboux 变换.

考虑 C-D 系统

$$\begin{cases} \varphi_x = M\varphi \\ \varphi_t = N\varphi \end{cases} \tag{2.93}$$

其相容性即为 $Au = 0$. 即 Lie 群结构方程. 通过例子说明 (2.93) 的 Darboux 变换的求法及其与孤子方程的求解间的关系.

**例 2.3.1** 考虑如下特征值问题

$$\varphi_x = M\varphi, M = \begin{pmatrix} \lambda + \frac{s}{2\lambda} & \frac{q}{2} + \frac{r}{2\lambda} \\ \frac{q}{2} - \frac{r}{2\lambda} & -\lambda - \frac{s}{2\lambda} \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \tag{2.94}$$

设它的线性辅助方程为:

$$\varphi_t = N\varphi, N = \begin{pmatrix} \lambda - \frac{s}{2\lambda} & \frac{q}{2} - \frac{r}{2\lambda} \\ \frac{q}{2} + \frac{r}{2\lambda} & -\lambda + \frac{s}{2\lambda} \end{pmatrix}$$

由 (2.94) 的相容性得到零曲率方程

$$M_t - N_x + [M, N] = 0 \tag{2.95}$$

即

$$
\begin{aligned}
&s_t + s_x + 2qr = 0 \\
&q_t - q_x - 4r = 0 \\
&r_t + r_x + 2sq = 0
\end{aligned}
\tag{2.96}
$$

考虑下面的等谱问题

$$
\begin{cases}
\bar{\varphi}_x = \bar{M}\bar{\varphi} \\
\bar{\varphi}_t = \bar{N}\bar{\varphi}
\end{cases}
\tag{2.97}
$$

其中 $\bar{M}, \bar{N}$ 与 $M, N$ 表示形式相同, 只需将 $M, N$ 中的 $q, r, s$ 换成 $\bar{q}, \bar{r}, \bar{s}$, 因此 $\bar{q}, \bar{r}, \bar{s}$ 也满足 (2.96).

作变换

$$
\bar{\varphi} = T\varphi, T = \begin{pmatrix} \lambda + a & -b \\ b & \lambda - a \end{pmatrix}
\tag{2.98}
$$

其中 $a, b$ 是关于 $x, t$ 的函数. (2.98) 成立就有

$$
\begin{cases}
T_x = \bar{M}T - TM \\
T_t = \bar{N}T - TN
\end{cases}
\tag{2.99}
$$

设

$$
\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{\varphi} = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_{11} & \bar{\varphi}_{12} \\ \bar{\varphi}_{21} & \bar{\varphi}_{22} \end{pmatrix}
$$

分别是 (2.94) 和 (2.97) 的基本解矩阵; 又令

$$
\phi_1 = \varphi_{11}(x, \lambda_1) + k_1\varphi_{12}(x, \lambda_1), \phi_2 = \varphi_{21}(x, \lambda_1) + k_1\varphi_{22}(x, \lambda_1)
$$

将 (2.99) 展开整理得

$$
\begin{aligned}
&a = \frac{\phi_1^2 + \phi_2^2}{\phi_2^2 - \phi_1^2}\lambda_1, b = \frac{2\phi_1\phi_2}{\phi_2^2 - \phi_1^2}\lambda_1, \bar{q} = q + 4b \\
&\bar{r} = \frac{(a^2 + b^2)r + 2abs}{b^2 - a^2}, \bar{s} = \frac{(a^2 + b^2)s + 2abr}{a^2 - b^2}
\end{aligned}
\tag{2.100}
$$

于是我们就求得了 (2.94) 的 Darboux 变换 (2.98),(2.100).

下面推出一类 Duffing 型方程, 并用 Darboux 变换法求其精确解. 由 (2.96) 知:

$$(s^2 - r^2)_t + (s^2 - r^2)_x = 0$$

取 $s = \delta\mathrm{ch}\alpha, r = \delta\,\mathrm{sh}\alpha$, 则上式化为

$$\delta_t + \delta_x = 0 \tag{2.101}$$

易见 (2.101) 的解为

$$\delta = \delta(x, t) = f(x - t)$$

$f$ 是任意函数. 将

$$q = -\frac{1}{2}(\alpha_x + \alpha_t)$$

代入 (2.96) 的第二式得到带附加项的 Duffing 型方程

$$\alpha_{tt} - \alpha_{xx} + 8\delta\mathrm{sh}\alpha = 0 \tag{2.102}$$

因为

$$a^2 - b^2 = \lambda_1^2$$

取

$$a = \lambda_1\mathrm{ch}\theta, \quad b = \lambda_1\mathrm{sh}\theta$$

则

$$r = -\delta\,\mathrm{sh}(\alpha + 2\theta) = \delta\,\mathrm{sh}\bar{\alpha}, \bar{s} = \delta\mathrm{ch}(\alpha + 2\theta) = \delta\mathrm{ch}\bar{\alpha}$$

于是

$$\bar{\alpha} = -\alpha - 2\theta$$

进行多次 Darboux 变换后, 有

$$a_j = \lambda_j\mathrm{ch}\theta_j, b_j = \lambda_j\mathrm{sh}\theta_j$$

由此得到 (2.102) 的精确解为：

$$\alpha_n = -\alpha - \sum_{j=1}^{n} 2\theta_j$$

对于两个 C-D 系统 (2.93) 和 (2.97), 它们具有相同的可积性, 即它们的相容性条件是相同的. 事实上, 我们有

**定理 2.3.1** 设给定线性方程组

$$\begin{cases} \varphi_x = M\varphi \\ \varphi_t = N\varphi \end{cases} \tag{2.103}$$

及

$$\begin{cases} \varphi'_x = M'\varphi' \\ \varphi'_t = N'\varphi' \end{cases} \tag{2.104}$$

若存在 Darboux 变换

$$\varphi' = T(t,x)\varphi$$

使得

$$M' = TMT^{-1} + T_xT^{-1}, N' = TNT^{-1} + T_tT^{-1}$$

则有

$$M'_t - N'_x + M'N' - N'M' = T(M_t - N_x + MN - NM)T^{-1} \tag{2.105}$$

**证明** 因为

$$M' = TMT^{-1} + T_xT^{-1}, N' = TNT^{-1} + T_tT^{-1}$$

所以

$$\begin{aligned}
M'_t &= T_tMT^{-1} + TM_tT^{-1} + TM(T^{-1})_t + T_{xt}T^{-1} + T_x(T^{-1})_t \\
N'_x &= T_xNT^{-1} + TN_xT^{-1} + TN(T^{-1})_x + T_{tx}T^{-1} + T_t(T^{-1})_x \\
M'N' &= TMNT^{-1} + T_xNT^{-1} - TM(T^{-1})_t - T_x(T^{-1})_t \\
N'M' &= TNMT^{-1} + T_tMT^{-1} - TN(T^{-1})_x - T_x(T^{-1})_x
\end{aligned}$$

代入 (2.105) 的左端即可推出右端.

对于 C-D 可积系统, 我们不仅能求出其一个 Darboux 变换, 而且还可求出其二类 Darboux 变换. 根据这种思想, 我们对一个含三个位势的等谱问题求出了其二类 Darboux 变换.

**例 2.3.2** 考虑等谱问题

$$\varphi_x = M\varphi, M = \begin{pmatrix} i\xi s_3 & \xi u \\ \xi v & i\xi s_3 \end{pmatrix} \tag{2.106}$$

其中

$$u = s_2 + is_1, \quad v = -s_2 + is_1$$

$s_1, s_2, s_3$, 为 $x, t$ 的实函数, 且 $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$.

设 (2.106) 的辅助线性方程为

$$\varphi_t = N\varphi, N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} A_j & B_j \\ C_j & -A_j \end{pmatrix} \lambda^{n-j}$$

则 (2.106) 的可积条件为:

$$M_t - N_x + [M, N] = 0$$

令

$$\bar{\varphi} = T\varphi = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} \varphi, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T \tag{2.107}$$

假设 (2.106) 经过 (2.107) 化为另一个特征值问题

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_x = \bar{M}\bar{\varphi} \\ \bar{\varphi}_t = \bar{N}\bar{\varphi} \end{cases} \tag{2.108}$$

则根据定理 2.3.1 知,(2.108) 的可积条件为

$$M_t - N_x + [\bar{M}, N] = 0$$

其中 $\tilde{M},\tilde{N}$ 的表达式分别与 $M,N$ 相同，只是将 $s_i$ 换成 $\bar{s}_i(I=1,2,3)$. 设 $\xi_1$ 为 DetT 的一个零点，则 $\det\bar{\varphi}(x,\xi_1)=0$, 故存在常数 $\mu_1,v_1,|\mu_1|+|v_1|\neq 0$, 满足

$$\mu_1\bar{\varphi}_{i1}(x,\xi_1)+v_1\bar{\varphi}_{i2}(x,\xi_1)=0$$

其中 $\varphi_{ij},\bar{\varphi}_{ij}$ 为 (2.106) 和 (2.108) 的基本解矩阵. 令

$$\phi_1(x,\xi_1)=\mu_1\varphi_{11}(x,\xi_1)+v_1\varphi_{12}(x,\xi_1)$$

$$\varphi_2(x,\xi_1)=\mu_1\varphi_{21}(x,\xi_1)+v_1\varphi_{22}(x,\xi_1),\zeta_1=\frac{\phi_2}{\phi_1}$$

则有

$$\begin{aligned}
T_{1x}&=\xi\bar{u}T_3-\xi vT_2+i\xi(s_3-s_3)T_1,\\
T_{2x}&=\xi\bar{u}T_4-\xi uT_1+i\xi(\bar{s}_3+s_3)T_2\\
T_{3x}&=\xi vT_1-\xi vT_4-i\xi(\bar{s}_3+s_3)T_3,\\
T_{4x}&=\xi\bar{v}T_2-\xi uT_3-i\xi(s_3-s_3)T_4
\end{aligned}$$

取 $\xi=\xi_1$, 于是得到,

$$\begin{aligned}
&T_1=\zeta_1 u,T_2=-u,T_3=-\zeta_1,T_4=1\\
&s_3=s_3,u=-u_x\xi_1^{-1}+u^2\zeta_1+2ius_3,\bar{v}=-\zeta_1
\end{aligned}$$

故得第一类 Darboux 变换

$$\begin{aligned}
&\zeta_1=\frac{\mu_1\varphi_{21}(x,\xi_1)+v_1\varphi_{22}(x,\xi_1)}{\mu_1\varphi_{11}(x,\xi_1)+v_1\varphi_{12}(x,\xi_1)},u=u_x\xi_1^{-1}-u^2\zeta_1-2ius_3\\
&v=\zeta_1,\bar{s}_3=s_3,\varphi=T_1'\varphi=\begin{pmatrix}\xi-\xi_1+\zeta_1 u & -u\\ -\zeta_1 & 1\end{pmatrix}\varphi
\end{aligned}$$

令 $\eta_2=\dfrac{\phi_1}{\phi_2}$, 同理可推得第二类 Darboux 变换 [在 (2.109) 中取 $\xi=\xi_2$]:

$$\begin{aligned}
&\eta_2=\frac{\mu_2\varphi_{11}(x,\xi_2)+v_2\varphi_{12}(x,\xi_2)}{\mu_2\varphi_{21}(x,\xi_2)+v_2\varphi_{22}(x,\xi_2)},\bar{v}=v_x\xi_2^{-1}-\eta_2v^2-2ivs_3\\
&u=-\eta_2,\bar{s}_3=s_3,\varphi=T_2'\varphi=\begin{pmatrix}1 & -\eta_2\\ v & \xi-\xi_2-\eta_2v\end{pmatrix}\varphi
\end{aligned}$$

其中 $|\mu_2| + |v_2| \neq 0$.

下面对第一类和第二类 Darboux 变换作复合运算. 先作第一类 Darboux 变换:

$$\bar{\varphi} = T\varphi, T = T_1', \bar{u} = u_x\xi_1^{-1} - u^2\zeta_1 - 2ius_3, \bar{v} = \zeta_1, \bar{s}_3 = s_3$$

再作第二类 Darboux 变换

$$\tilde{\varphi} = \bar{T}\bar{\varphi}, \bar{T} = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{\eta}_2 \\ v & \xi - \xi_2 - \bar{\eta}_2\bar{v} \end{pmatrix}, \hat{u} = -\eta_2$$

$$\tilde{v} = v_x\xi_2^{-1} - \eta_2\bar{v}^2 - 2i\bar{v}\bar{s}_3$$

于是

$$\tilde{\varphi} = \bar{T}\bar{\varphi} = \bar{T}T\varphi$$

$$\bar{T}T = \begin{pmatrix} \xi - \xi_1 + \zeta_1(u + \bar{\eta}_2) & -u - \eta_2 \\ \xi - \xi_1 + \zeta_1(u + \bar{\eta}_2)\bar{v} - \zeta_1(\xi - \xi_2) & \xi - \xi_2 - (u + \eta_2)\bar{v} \end{pmatrix}$$

因为

$$\eta_2 = \frac{\mu_2\varphi_{11}(x,\xi_2) + v_2\varphi_{12}(x,\xi_2)}{\mu_2\varphi_{21}(x,\xi_2) + v_2\bar{\varphi}_{22}(x,\xi_2)} = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\zeta_2 - \zeta_1} - u$$

$$\zeta_2 = \frac{\mu_2\varphi_{21}(x,\xi_2) + v_2\varphi_{22}(x,\xi_2)}{\mu_2\varphi_{11}(x,\xi_2) + v_2\varphi_{12}(x,\xi_2)}$$

所以我们推得第三类 Darboux 变换

$$\zeta_1 = \frac{\mu_1\varphi_{21}(x,t,\xi_1) + v_1\varphi_{22}(x,t,\xi_1)}{\mu_1\varphi_{11}(x,t,\xi_1) + v_1\varphi_{12}(x,t,\xi_1)}$$

$$\zeta_2 = \frac{\mu_2\varphi_{21}(x,t,\xi_2) + v_2\varphi_{22}(x,t,\xi_2)}{\mu_2\varphi_{11}(x,t,\xi_2) + v_2\varphi_{12}(x,t,\xi_2)}$$

$$\tilde{u} = u - \frac{\xi_2 - \xi_1}{\zeta_2 - \zeta_1}, \tilde{v} = -v + 4is_3\xi_1 + u\xi_1^2 - \left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{\zeta_2 - \zeta_1} - u\right)\zeta_1^2$$

$$\tilde{\varphi} = T_3'\varphi = \bar{T}T\varphi$$

$$= \begin{pmatrix} \xi - \xi_1 + \zeta_1\dfrac{\xi_2 - \xi_1}{\zeta_2 - \zeta_1} & \dfrac{\xi_1 - \xi_2}{\zeta_2 - \zeta_1} \\ \left(\xi - \xi_1 + \zeta_1\dfrac{\xi_2 - \xi_1}{\zeta_2 - \zeta_1}\right)v - \zeta_1(\xi - \xi_2) & \xi - \xi_2 + \dfrac{(\xi_2 - \xi_1)v}{\zeta_2 - \zeta_1} \end{pmatrix}\varphi$$

## 2.4 C-D 对和广义 Darboux 变换

我们知道，可以从 KdV 方程的 Riccati 形式的 Lax 对获得求 KdV 方程解的递推公式. 将该思想和 C-D 思想推广到变系数的情形，获得了变系数 KdV 方程

$$A_1u = u_t + k_1(t)(u_{xxx} + 6uu_x) + (4k_2(t) - xk_3(t))u_x - 2k_3(t)u = 0 \tag{2.109}$$

[其中 $k_1(t), k_2(t), k_3(t)$ 为 $t$ 的任意函数]和带有外力项的广义 KdV 方程

$$A_2u = u_t + h(u_{xxx} + 6uu_x) + 6fhu - g(t) + x(12hf^2 + f_t) = 0 \tag{2.110}$$

[其中 $h = h(t), g = g(t), f = f(t)$ 为 $t$ 的任意函数]的 Darboux 变换和精确解.

首先考虑方程 (2.109), 它有 C-D 对 (即 Lax 对)

$$\begin{cases} C(u,\varphi) = \varphi_{xx} - (\lambda - u)\varphi = 0 \\ D(u,\varphi) = \varphi_t - [xk_3 - 4k_2 - 2k_1(u + 2\lambda)]\varphi_x \\ \qquad - (k_1u_x + \dfrac{1}{2}k_3)\varphi = 0 \end{cases} \tag{2.111}$$

令

$$w = \frac{\partial}{\partial x}\ln\varphi = \frac{\varphi_x}{\varphi} \tag{2.112}$$

将其代入 (2.111), 得到 (2.109) 的 Riccati 形式的 C-D 对

$$\begin{cases} C(w,u) = w_x - (\lambda - u - w^2) = 0 \\ D(w,u) = w_t - [4k_2 + 2k_1(u + 2\lambda) - xk_3] \\ \quad \times(w^2 + u - \lambda) - (k_3 - 2k_1u_x)w - k_1u_{xx} = 0 \end{cases} \tag{2.113}$$

或

$$\begin{cases} C(w,u) = w_x - (\lambda - u - w^2) = 0 \\ D(w,u) = w_t - [xk_3 - 4k_2 - 2k_1(u + 2\lambda)]w_x \\ \quad +(k_3 - 2k_1u_x)w - k_1u_{xx} = 0 \end{cases} \tag{2.114}$$

线性方程 (2.113) 或 (2.114) 的相容条件 (即 $w_{xt}=w_{tx}$) 恰是 (2.109). 因此, 如果 $(u,w)$ 满足 (2.113) (或 (2.114)) 的解, 那么 $u$ 一定是 (2.109) 的解. 下面仅考虑 C-D 对 (2.113) 对应的方程 (2.109) 的解.

如果利用 C-D 对 (2.113) 可以构造出广义的 Darboux 变换

$$u_{i+1}=f(u_i,w_i),\ w_{i+1}=g(u_i,w_i)$$

那么利用其可以获得原方程的解. 令

$$\begin{aligned}
\alpha_i(x,t)&=[4k_2+2k_1(u_i+2\lambda)-xk_3]w_i-k_1u_{ix}+\frac{1}{2}k_3+\frac{\partial}{\partial t}(\int w_i\mathrm{d}x)\\
\beta_i(x,t)&=[4k_2+2k_1(u_i+2\lambda)-xk_3]\exp(-2\textstyle\int w_i\mathrm{d}x)\\
&\quad+2\alpha_i(x,t)\textstyle\int\exp(-2\int w_i\mathrm{d}x)\mathrm{d}x+\displaystyle\frac{\partial}{\partial t}(\int\exp(-2\int w_i\mathrm{d}x)\mathrm{d}x)
\end{aligned}$$

如果 $(u_i,w_i)$ 满足 (2.113), 那么 $\alpha_i(x,t),\beta_i(x,t)$ 都是仅仅为 $t$ 的函数, 即

$$\alpha_{ix}(x,t)=0,\ \beta_{ix}(x,t)=0$$

**定理 2.4.1** (广义 Darboux 变换) 取

$$\begin{aligned}
u_{i+1}&=f(u_i,w_i)=u_i-2w_{ix}-2(\ln M_i(x,t))_{xx}\\
w_{i+1}&=g(u_i,w_i)=-w_i-(\ln M_i(x,t))_x\\
M_i(x,t)&=\textstyle\int\exp(-2\int w_i\mathrm{d}x)\mathrm{d}x+\exp(-2\int\alpha_i(t)\mathrm{d}t)\\
&\qquad\times[\beta_0-\textstyle\int\beta_i(t)\exp(2\int\alpha_i(t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}t]
\end{aligned}\tag{2.115}$$

(其中 $\beta_0$ 为常数).

如果 $(u,w)$ 满足 (2.113), 那么 $(u_{i+1},w_{i+1})$ 也满足 (2.113).

证明: 只需要证明 $(u_{i+1},w_{i+1})$ 满足如下方程组

$$\begin{aligned}
w_{i+1,x}&=\lambda-u_{i+1}-w_{i+1}^2\\
w_{i+1,t}&=-[4k_2+2k_1(u_{i+1}+2\lambda)-xk_3]w_{i+1,x}\\
&\qquad+(k_3-2k_1u_{i+1,x})w_{i+1}+k_1u_{i+1,xx}
\end{aligned}\tag{2.116}$$

下面分别证明它们满足这两个方程:

(i) $(\ln M_i)_x = \exp(-2\int w_i \mathrm{d}x)M_i^{-1}$

$$(\ln M_i)_{xx} = -2w_i\exp(-2\int w_i \mathrm{d}x)M_i^{-1} - \exp(-4\int w_i \mathrm{d}x)M_i^{-2} \tag{2.117}$$

(ii) 将 (2.115) 第三式关于 $t$ 微分一次, 可得

$$w_{i+1,t} = -w_{it} - 2(\int w_i \mathrm{d}x)_t \exp(-2\int w_i \mathrm{d}x)M_i^{-1} - \exp(-2\int w_i \mathrm{d}x)M_{it}M_i^{-2} \tag{2.118}$$

$$\begin{aligned} M_{i,t} &= \frac{\partial}{\partial t}[\int \exp(-2\int w_i \mathrm{d}x)\mathrm{d}x] - \alpha_i(t)\exp(-\int \alpha_i(t)\mathrm{d}t) \\ &\quad \times[\beta_0 - \int \beta_i(t)\exp(\int \alpha_i(t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}t] - \beta_i(t) \\ &= -\alpha_i(t)M_i(x,t) + [xk_3 - 4k_2 - 2k_1(u_i + 2\lambda)]\exp(-2\int w_i \mathrm{d}x) \end{aligned} \tag{2.119}$$

将 (2.118) 代入 (2.117), 可以得到

$$\begin{aligned} w_{i+1,t} = &-k_1 u_{ixx} - (k_3 - 2k_1 u_x)[w_i + \exp(-2\int w_i dt)M_i^{-1}] \\ &-[4k_2 + 2k_1(u_i + 2\lambda) - xk_3][w_{ix} - 2w_i\exp(-2\int w_i dx)M_i^{-1} \\ &-\exp(-4\int w_i dx)M_i^{-2}] \end{aligned} \tag{2.120}$$

根据 (2.115) 第二式, 则 (2.119), 约化为

$$w_{i+1,t} = -k_1 u_{ixx} + (k_3 - 2k_1 u_x)[w_{i+1} + [4k_2 + 2k_1(u_i + 2\lambda) - xk_3]w_{i+1,x} \tag{2.121}$$

从 (2.115) 第一式和 (2.116) 第一式, 可得

$$\begin{aligned} u_i &= u_{i+1} + 2w_{i+1,x} = u_{i+1} + 2(\lambda - u_{i+1} - w_{i+1}^2) \\ &= 2\lambda - u_{i+1} - 2w_{i+1}^2 \\ u_{ix} &= -u_{i+1,x} - 4w_{i+1,x}w_{i+1,x} \\ &= -u_{i+1,x} - 4w(\lambda - u_{i+1} - w_{i+1}^2) \\ u_{ixx} &= -u_{i+1,xx} - 4(\lambda - u_{i+1} - w_{i+1}^2) + 4w_{i+1}u_{i+1,x} \\ &\quad + 8w_{i+1}^2(\lambda - u_{i+1} - w_{i+1}^2) \end{aligned} \tag{2.122}$$

将上式代入 (2.121), 可以证明 (2.116) 第二式.

从定理可以得到方程 (2.109) 解的一个新的递推公式 (2.116). 事实上, 它也是 (2.109) 的一个 Bäcklund 变换.

对于方程 (2.113) 的一个解 $(u_i, w_i)$ 仅仅需要积分运算, 通过 Bäcklund 变换 (2.116) 可以得到 (2.113) 的另一个解 $(u_{i+1}, q_{i+1})$, 根据同样的步骤, 可以得到 (2.113) 的第三组解, 等等. 因此, 其中的解 $u_i, u_{i+1}, u_{i+2}, \cdots$ 正是 (2.109) 的解. 下面我们应用获得的广义 Darboux 变换来研究 (2.109) 的解.

情形 1：取 $u_1 = \lambda, w_1 = 0$, 易证 $(u_1, w_1)$ 为 (2.113) 的一个解, 则

$$\int w_i \mathrm{d}x = g(t), \int \exp(-2\int w_i \mathrm{d}x)\mathrm{d}x = \exp[-2g(t)]x + f(t)$$

其中 $g(t)$、$f(t)$ 为 $t$ 的积分函数. 因此有

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= g_t + \frac{1}{2}k_3 \\ \beta_1(t) &= f_t + 2fg_t + fk_3 + (6\lambda k_1 + 4k_3)\exp(-2g) \\ M_1(x,t) &= \exp(-2g)x + f + \exp(-g - \frac{1}{2}\int k_3(t)\mathrm{d}t) \\ &\quad \times[\beta_0 - \int \beta_1(t)\exp(g + \frac{1}{2}\int k_3(t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}t] \end{aligned} \tag{2.123}$$

因此根据 Bäcklund 变换 (2.116), 有

$$\begin{aligned} u_2 &= \lambda - 2\exp(-4g)\{\exp(-2g)x + f + \exp(-g - \frac{1}{2}\int k_3(t)\mathrm{d}t) \\ &\quad \times[\beta - \int \beta_1(t)\exp(g + \frac{1}{2}\int k_3(t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}t]\}^{-2} \\ w_2 &= \exp(-2g)\{\exp(-2g)x + f + \exp(-g - \frac{1}{2}\int k_3(t)\mathrm{d}t) \\ &\quad \times[\beta_0 - \int \beta_1(t)\exp(g + \frac{1}{2}\int k_3(t)\mathrm{d}t)\mathrm{d}t]\}^{-1} \end{aligned}$$

很显然 $u_2$ 为 (2.109) 的有理解.

情况 2： 取方程 (2.113) 的另一个解, 即

$$u_1(x,t) = \lambda - \mu\exp(\int k_3(t)\mathrm{d}t), w_1 = \mu\exp(\int k_3\mathrm{d}t). \tag{2.124}$$

其中 $\mu \neq 0$ 为常数. 因此我们有

$$\int w_1 \mathrm{d}x = \mu\exp(\int k_3 \mathrm{d}t)x + h_1(t)$$

$$\begin{aligned}&\int \exp(-2\int w_1 \mathrm{d}x)\mathrm{d}x \\ =& -\frac{1}{2\mu}\exp[-2\mu x e^{\int k_3 \mathrm{d}t} \quad \int k_3 \mathrm{d}t - 2h_1(t)] + h_2(t)\end{aligned}$$

其中 $h_1(t), h_2(t)$ 为 $t$ 的积分函数. 从其可得

$$\alpha_1(t) = 2[2k_3 + k_1(3\lambda - \mu^2 e^{2\int k_3 \mathrm{d}t}]e^{\int k_3 \mathrm{d}t} + \frac{1}{2}k_3 + h_1'(t), \beta_1(t) = 0$$

将 $\alpha_1(t), \beta_1(t)$ 代入 $M_1(x,t)$, 得

$$\begin{aligned}M_1(x,t) = & -\frac{1}{2\mu}\exp[-2\mu x e^{\int k_3 \mathrm{d}t} - \int k_3 \mathrm{d}t - 2h_1(t)] + h_2(t) \\ & +\beta_0 e^{\quad 2\int \alpha_1(t)\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

因此应用 Bäcklund 变换 (2.116) 可得

$$\begin{aligned}u_2(x,t) &= \lambda - \mu\exp(\int k_3 \mathrm{d}t) - \frac{2(M_{1xx}M_1 - M_{1x}^2)}{M_1^2} \\ w_2(x,t) &= -\mu\exp(\int k_3 \mathrm{d}t) - \frac{M_{1x}}{M_1}\end{aligned} \tag{2.125}$$

事实上,$u_2(x,t)$ 为 (2.109) 的解, 可以将其改写为:

(i) 当 $\mathrm{sgn}(\mu) = \quad \mathrm{sgn}(h_2(t) + \beta_0\exp[-2\int \alpha_1(t)\mathrm{d}t])$, 可以获得一个类钟状孤波解

$$\begin{aligned}u(x,t) = \lambda - \mu\exp(\int k_3 \mathrm{d}t) - 2\mu^2\exp(2\int k_3 \mathrm{d}t)\mathrm{sech}^2\{-\mu x e^{\int k_3 \mathrm{d}t} \\ -\frac{1}{2}\int k_3 \mathrm{d}t - h_1(t) - \ln[-2\mu h_2(t) - 2\mu\beta_0\exp(-2\int \alpha_1(t)\mathrm{d}t)]\}\end{aligned}$$

(ii) 当 $\mathrm{sgn}(\mu) = \mathrm{sgn}(h_2(t) + \beta_0\exp[-2\int \alpha_1(t)\mathrm{d}t])$, 可以获得另一个奇异状孤波解

$$\begin{aligned}u(x,t) = \lambda \quad \mu\exp(\int k_3 \mathrm{d}t) - 2\mu^2\exp(2\int k_3 \mathrm{d}t)\mathrm{csch}^2\{-\mu x e^{\int k_3 \mathrm{d}t} \\ -\frac{1}{2}\int k_3 \mathrm{d}t - h_1(t) - \ln[2\mu h_2(t) + 2\mu\beta_0\exp(-2\int \alpha_1(t)\mathrm{d}t)]\}\end{aligned}$$

# 第三章　Bäcklund 变换及有关问题

在第一章已经提到过几何学家 Bäcklund 在研究负常曲率曲面时，得到了 Sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换 (BT):

$$u'_\xi = u_\xi + 2\beta\sin(\frac{u+v}{2}), u'_\eta = -u_\eta + \frac{2}{\beta}\sin(\frac{u-u'}{2})$$

因为在一般情况下，上式是不容易求解的，但是 Bianchi 找到了一个很有用的事实：

设从 Sine-Gordon 方程的解 $u_0$ 出发，通过以 $\beta_1$ 为参数的 Bäcklund 变换，得到 Sine-Gordon 方程的解 $u_1$. 又从 $u_1$ 出发，作以 $\beta_2$ 为参数的 Bäcklund 变换（$\beta_1 \neq \beta_2$），得到 $u_{12}$. 再从 $u_0$ 出发，以 $\beta_2$ 为参数，作 Bäcklund 变换，可得解 $u_2$, 从 $u_2$ 出发，以 $\beta_1$ 为参数，作 Bäcklund 变换得解 $u_{21}$. 若后两个 Bäcklund 变换的积分常数选择得当，就有 $u_{12} = u_{21}$, 这称为可换性定理，它是制作多个孤立子的手段. 令人注目的是 Bäcklund 变换的存在、可换性定理和非线性叠加公式等事项不是 Sine-Gordon 方程的专利. 1973 年，Wahlquist 和 Estabrook 发现 KdV 方程也有类似的性质. 经验表明，大多数孤立子方程都有 Bäcklund 变换和无穷守恒律等事项. 因此寻求孤立子方程的 Bäcklund 变换及有关问题是研究孤立子理论的重要方面之一.

## 3.1　利用齐次平衡法获得 Bäcklund 变换

王明亮教授提出了求 Bäcklund 变换的齐次平衡法，利用这种方法不仅能获得 Bäcklund 变换，而且也能得到非线性演化方程的精确解. 范恩贵教授利用齐次平衡法获得了一大批有重要物理背景的非线性演化方程的 Bäcklund 变换及精确解. 但是对某些非线性演化方程，直接利用齐次平衡法是有困难的，需要作一个适当的变换，对此我们用著名的 Boussinesq 方程为例予以说明.

**例 3.1.1** 考虑 Boussinesq 方程

$$q_{tt} = q_{xx} + 3(q^2)_{xx} + q_{xxxx} \tag{3.1}$$

该方程是 Boussinesq 于 1871 年在描述浅水波传播时引进的, 这方程也有其他方面的物理应用, 包括一维非线性应力和等离子体中的离子声波等.

为求 (3.1) 的 BT, 设 $q = u_x$, 并代入 (3.1) 得

$$u_{tt} = u_{xx} + 6u_x u_{xx} + u_{xxxx} \tag{3.2}$$

平衡 (3.2) 可设

$$u = f'(\phi)\phi_x + u_1(x,t) \tag{3.3}$$

其中 $f(\varphi), \varphi$ 都为待定函数. 由 (3.3) 知

$$u_x = f''\varphi_x^2 + f'\varphi_{xx} + u_{1x}, \quad u_{xx} = f'''\varphi_x^3 + 3f''\varphi_x\varphi_{xx} + f'\varphi_{xxx} + u_{1xx}$$

$$\begin{aligned} u_{xxxx} = {} & f^{(5)}\varphi_x^5 + 10f^{(4)}\varphi_x^3\varphi_{xx} + 15f'''\varphi_x\varphi_{xx}^2 + 10f'''\varphi_x^2\varphi_{xxx} \\ & + 10f''\varphi_{xx}\varphi_{xxx} + 5f''\varphi_{xx}\varphi_{xxxx} + f'\varphi_{5x} + u_{1xxxx} \end{aligned}$$

$$u_{tt} = f'''\varphi_t^2\varphi_x + f''\varphi_{tt}\varphi_x + 2f''\varphi_t\varphi_{xt} + u_{1tt}$$

将上式代入 (3.2) 整理得:

$$\begin{aligned} & u_{xxxx} + 6u_x u_{xx} + u_{xx} - u_{tt} \\ & = (f^{(5)} + 6f''f''')\varphi_x^5 + (10f^{(4)} + 18f''^2 + 6f'f''')\varphi_x^3\varphi_{xx} \\ & + 15f'''\varphi_x\varphi_{xx}^2 + 10f'''\varphi_x^2\varphi_{xxx} + 6f'f''\varphi_x^2\varphi_{xxx} + 18f'f''\varphi_{xx}^2\varphi_{xx} \\ & + 6f'''\varphi_x^3 u_{1x} + f'''\varphi_x^3 - f'''\varphi_t^2\varphi_x + 10f''\varphi_{xx}\varphi_{xxx} + 5f''\varphi_x\varphi_{xxx} \\ & + 6f''\varphi_x^2 u_{1xx} + 6f'^2\varphi_{xx}\varphi_{xxx} + 18f''\varphi_x\varphi_{xx}u_{1x} + 3f''\varphi_x\varphi_{xx} \\ & + f(\varphi_{xxx} + \varphi_{5x}) + 6f'\varphi_{xx}u_{1xx} + 6f'\varphi_{xxx}u_{1x} - f''\varphi_{ttt}\varphi_x \end{aligned}$$

$$-2f''\varphi_t\varphi_{xt} - f'\varphi_{xtt} + u_{1xxxx} + u_{1xx} + 6u_{1x}u_{1xx} - u_{tt} \tag{3.4}$$

令

$$f^{(5)} + 6f''f''' = 0 \tag{3.5}$$

解之得:

$$f = 2\ln\varphi \tag{3.6}$$

将 (3.5),(3.6) 代入 (3.4) 得:

$$\begin{aligned}u_{xxxx} + 6u_x u_{xx} + u_{xx} - u_{tt} = {} & (4\varphi_x^2\varphi_{xx} - 3\varphi_x\varphi_{xxx} - \varphi_t^2\varphi_x \\ & + \varphi_x^3 + 6\varphi_x^3 u_{1x})f''' + (5\varphi_x\varphi_{xxx} - 2\varphi_{xx}\varphi_{xxx} + 6\varphi_x^2 u_{1xx} \\ & + 18\varphi_x\varphi_{xx}u_{1x} + 3\varphi_x\varphi_{xx} - \varphi_x\varphi_{tt} - 2\varphi_t\varphi_{xt})f'' + (\varphi_{xxx} \\ & + \varphi_{5x} + 6\varphi_{xx}u_{1xx} + 6\varphi_{xxx}u_{1x} - \varphi_{xtt})f' + u_{1xx} \\ & + u_{1xxxx} + 6u_{1x}u_{1xx} - u_{1tt}\end{aligned} \tag{3.7}$$

设 $f'''$、$f''$、$f'$ 的系数为零, 则有

$$4\varphi_x^2\varphi_{xxx} - 3\varphi_x\varphi_{xx}^2 - \varphi_t^2\varphi_x + \varphi_x^3 + 6\varphi_x^3 u_{1x} = 0$$

$$\begin{aligned}&5\varphi_x\varphi_{xxx} - 2\varphi_{xx}\varphi_{xxx} + 6\varphi_x^2 u_{1xx} + 18\varphi_x\varphi_{xx}u_{1x} + 3\varphi_x\varphi_{xx} \\ &- \varphi_x\varphi_{tt} - 2\varphi_t\varphi_{xt} = 0\end{aligned}$$

$$\varphi_{xxx} + \varphi_{5x} + 6\varphi_{xx}u_{1xx} + 6\varphi_{xxx}u_{1x} - \varphi_{xtt} = 0$$

$$u_{1xx} + u_{1xxxx} + 6u_{1x}u_{1xx} - u_{1tt} = 0$$

该方程组等价于下列方程组

$$\varphi_x(4\varphi_x\varphi_{xxx} - 3\varphi_{xx}^2 - \varphi_t^2 + \varphi_x^2 + 6\varphi_x^2 u_{1x}) = 0 \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}(4\varphi_x\varphi_{xxx} - 3\varphi_{xx}^2 - \varphi_t^2 + \varphi_x^2 + 6\varphi_x^2 u_{1x}) \\ &\quad + \varphi_x(\varphi_{xx} + \varphi_{xxxx} + 6\varphi_{xx}u_{1x} - \varphi_{tt}) = 0\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_{xx} + \varphi_{xxxx} + 6\varphi_{xx}u_{1x} - \varphi_{tt}) = 0 \tag{3.10}$$

$$u_{1xx} + u_{1xxxx} + 6u_{1x}u_{1xx} - u_{1tt} = 0 \tag{3.11}$$

方程 (3.8)~(3.11) 成立当且仅当下方程组成立

$$
\begin{aligned}
&4\varphi_x\varphi_{xxx}-3\varphi_{xx}^2-\varphi_t^2+\varphi_x^2+6\varphi_x^2u_{1x}=0\\
&\varphi_{xx}+\varphi_{xxxx}+6\varphi_{xx}u_{1x}-\varphi_{tt}=0\\
&u_{1xx}+u_{1xxxx}+6u_{1x}u_{1xx}-u_{1tt}=0
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

将 (3.6) 代入 (3.3) 得:

$$
u=\frac{2\varphi_x}{\varphi}+u_{1x}(x,t)
$$

由此得到方程 (3.1) 的 Bäcklund 变换

$$
q=2\left(\frac{\varphi_x}{\varphi}\right)_x+u_{1x}=2(\ln\varphi)_{xx}+u_{1x} \tag{3.13}
$$

其中 $\varphi$ 满足 (3.12).

利用 Bäcklund 变换可求 Boussinesq 方程的精确孤立子解, 分以下二种情形讨论:

情形 1: 设 $u_1(x,t)=c$. 则 (3.12) 约化为

$$
4\varphi_x\varphi_{xxx}-3\varphi_{xx}^2-\varphi_t^2+\varphi_x^2=0 \tag{3.14}
$$

$$
\varphi_{xx}+\varphi_{xxx}-\varphi_{tt}=0 \tag{3.15}
$$

易见 (3.14)~(3.15) 的一个特解为:

$$
\varphi=1+\exp(\sqrt{a}x+\sqrt{a^2+a}t)
$$

代入 (3.13) 就得到方程的钟状孤子解:

$$
q=\frac{1}{2}\sec h^2\frac{1}{2}(\sqrt{a}x+\sqrt{a^2+a}t)
$$

情形 2: 设 $u_1(x,t)=-\dfrac{1}{6}x$. 同理可得该方程的另一个钟状孤子解

$$
q(x,t)=\frac{1}{2}a^2\sec h^2\frac{1}{2}(ax-a^2t)-\frac{1}{6}
$$

范恩贵教授和张鸿庆教授将齐次平衡法作了延拓推广，获得非线性发展方程的一些新的孤子解，他们的方法不仅适用常系数的 PDEs，而且也适应于变系数的 PDEs.

**例 3.1.2** 变系数的广义 KdV 方程

$$u_t + h_1(6uu_x + u_{xxx}) + 4h_2u_2 - h_3(2u + xu_x) = 0 \tag{3.16}$$

其中, $h_1 = h_1(t), h_2 = h_2(t), h_3 = h_3(t)$ 为 $t$ 的任意函数.

设 (3.16) 的解的形式为:

$$u = f''\varphi_x^2 + f'\varphi_{xx} + u_1 \tag{3.17}$$

将 (3.17) 代入 (3.16) 得:

$$\begin{aligned}
&h_1(f^{(5)} + 6f''f''')\varphi_x^5 + h_1(10f^{(4)} + 18f''^2 + 6f'f''')\varphi_x^3\varphi_{xx} \\
&+(f'''\varphi_x^2\varphi_t + 6f'f''h_1\varphi_x^2\varphi_{xxx} + 18f'f''h_1\varphi_{xx}^2\varphi_x + 15f'''h_1\varphi_{xx}^2 \\
&+10f'''h_1\varphi_x^2\varphi_{xxx} + 4f'''h_2\varphi_x^3 - xh_3f'''\varphi_x^3 + 6h_1f'''u_1\varphi_x^3)(2f''\varphi_x\varphi_{xt} \\
&+f''\varphi_t\varphi_{xx} + 6f'^2h_1\varphi_{xx}\varphi_{xxx} + 10f''h_1\varphi_{xx}\varphi_{xxx} + 5f''h_1\varphi_x\varphi_{xxxx} \\
&+12f''h_2\varphi_x\varphi_{xx} - 2f''h_3\varphi_x^2 - 3xf''h_3\varphi_x\varphi_{xx} + 18f''h_1u_1\varphi_x\varphi_{xx} \\
&+6f''h_1u_{1x}\varphi_x^2) + (\varphi_{xxt} + h_1\varphi_{5x} + 4h_2\varphi_{xxx} - 2h_3\varphi_{xx} - xh_3\varphi_{xx} \\
&-xh_3\varphi_{xxx} + 6h_1u_1\varphi_{xxx} + 6h_1u_{1x}\varphi_{xx})f' + u_{1t} \\
&+h_1(u_{1xxx} + 6u_1u_{1x}) + 4h_2u_{1x} - h_3(2u_1 + xu_{1x}) = 0
\end{aligned} \tag{3.18}$$

令 $\varphi_x^5$ 的系数为零得:

$$f = 2\ln\varphi \tag{3.19}$$

将 (3.19) 代入 (3.18), 并令 $f''', f''. f', f$ 的系数为零得到下列方程组:

$$\varphi_{xt} + h_1\varphi_{xxxx} + 4h_2\varphi_{xx} - xh_3\varphi_{xx} - h_3\varphi_x + 6h_1u_1\varphi_{xx} = 0 \tag{3.20}$$

$$\varphi_x\varphi_t + 4h_1\varphi_x\varphi_{xxx} - 3h_1\varphi_{xx}^2 + 4h_2\varphi_x^2 - xh_3\varphi_x^3 + 6h_1u_1\varphi_x^2 = 0 \tag{3.21}$$

$$u_{1t} + h_1(6u_1u_{1x} + u_{1xxx}) + 4h_2u_{1x} - h_3(2u_1 + xu_{1x}) = 0 \tag{3.22}$$

其中 $\varphi, u_1$ 满足 (3.20)~(3.22). 利用 (3.20)~(3.23) 可推出 (3.16) 的 Lax 对. 由 (3.21) 解出 $\varphi_t$, 然后关于 $x$ 微分 1 次, 并利用 (3.20), 再令 $\varphi_x = \psi^2$ 得:

$$\frac{(\psi_{xx} + u_1\psi)_x}{\psi_{xx} + u_1\psi} = \frac{\psi_x}{\psi} \tag{3.23}$$

所以

$$\psi_{xx} + u_1\psi = \lambda\psi \tag{3.24}$$

在 (3.20) 中令 $\varphi_x = \psi^2$ 并用 (3.24) 得:

$$\psi_t = (h_1 u_{1x} + \frac{1}{2}h_3)\psi + [xh_3 - 2h_1(u_1 + 2\lambda) - 4h_2]\psi_x \tag{3.25}$$

于是 (3.24),(3.25) 便构成变系数 KdV 方程的 Lax 对.
对 (3.20) 关于 $x$ 微分 1 次并取 $\sigma = \varphi_{xx}$, 则有

$$\sigma_t + [h_1(D^3 + 6u_{1x} + 6) + 4h_2 D - h_3(2 + xD)\sigma = 0$$

其中 $D = \frac{\partial}{\partial x}$. 可见 $\sigma$ 为变系数 KdV 方程 (3.16) 的一个对称. 由 (3.24) 可知:

$$\Phi\sigma = (D^2 + 4u + 2u_x D^{-1})\sigma = 4\lambda\sigma$$

所以 $\Phi$ 为 (3.16) 的强对称算子.

## 3.2 带参数的 Bäcklund 变换

寻找带参数的 Bäcklund 变换有助于我们发现非线性发展方程解的叠加方法、无穷守恒律等有关问题, 如何找到这样的 Bäcklund 变换呢? 下面给出了一种求法, 其基本思想是:

设非线性发展方程

$$w_{tt} = F(w) \tag{3.26}$$

的 Bäcklund 变换为:

$$u_t = f(u, v, u_x, v_x, \cdots), v_t = g(u, v, u_x, v_x, \cdots) \tag{3.27}$$

令

$$u = w + w', v = w - w'$$

$w, w'$ 为方程 (3.26) 的解, 即

$$w_{tt} = F(w), w'_{tt} = F(w') \tag{3.28}$$

将 (3.28) 式中两式分别相加和相减得:

$$u_{tt} = P(u, v), \qquad v_{tt} = Q(u, v) \tag{3.29}$$

其中

$$P(u, v) = F(\frac{u+v}{2}) + F(\frac{u-v}{2}), Q(u, v) = F(\frac{u+v}{2}) - F(\frac{u-v}{2})$$

由 (3.27) 式求出 $u_{tt}, v_{tt}$, 并与 (3.29) 式比较就引出一组关于 $f, g$ 的非线性偏微分方程组. 由此求出 $f, g$, 就得到带有参数的 Bäcklund 变换.

**例 3.2.1** 考虑 Benjamin 方程

$$h_{tt} + q(h^2)_{xx} + rh_{xxxx} = 0 \tag{3.30}$$

这里 $q, r$ 为常数. 令 $h = w_x$ 代入上式, 得:

$$w_{tt} = -2qw_x w_{xx} - rw_{xxxx}$$

由 (3.29) 知,

$$u_{tt} = -q(u_x u_{xx} + v_x v_{xx}) - ru_{xxxx} \tag{3.31}$$

$$v_{tt} = -q(u_x v_{xx} + v_x u_{xx}) - rv_{xxxx} \tag{3.32}$$

令 (3.30) 的 Bäcklund 变换为

$$u_t = \alpha v_{xx} + f(u, v, u_x) \tag{3.33}$$

$$v_t = \beta u_{xx} + g(v, u, u_x) \tag{3.34}$$

则

$$u_{tt} = \alpha\beta u_{xxxx} + (\alpha f_{u_x} + \alpha g_{v_x})v_{xxx} + \alpha g_{v_x v_x} v_{xx}^2 + (2\alpha g_{vv_x} v_x + \alpha g_u + 2\alpha g_{uv} u_x v_x + \alpha f_u)v_{xx} + (f_{u_x}^2 + \alpha g_u + \beta f_v)u_{xx} + 2\alpha g_{uv} u_x v_x + \alpha g_{uu} u_x^2 + f f_u + g f_v + f_u f_{u_x} u_x + f_{u_x} f_v v_x + \alpha g_{vv} v_x^2$$

该式与 (3.31) 右边比较 $u_{xxxx}, v_{xxx}, v_{xx}^2, u_{xx}, v_{xx}$ 的系数分别有

$$\begin{aligned}
&\alpha\beta = r, \alpha f_{u_x} + \alpha g_{v_x} = 0, \alpha g_{v_x v_x} = 0 \\
&2\alpha g_{vv_x} v_x + \alpha g_v + 2\alpha g_{uv_x} u_x + \alpha f_u = -q v_x \\
&f_{u_x}^2 + \alpha g_u + \beta f_v = -q u_x \\
&2\alpha g_{uv} u_x v_x + \alpha g_{vv} u_x^2 + f f_u + g f_v + f_u f_{u_x} u_x \\
&\qquad + f_{u_x} f_v v_x + \alpha g_{vv} v_x^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.35}$$

同理由 (3.32)~(3.34) 计算出 $v_{tt}$ 并与 (3.32) 比较可得下列方程组

$$\begin{aligned}
&\beta(f_{u_x} + g_{v_x}) = 0, \beta f_{u_x u_x} = 0 \\
&2\beta f_{uu_x} u_x + \beta f_u + 2\beta f_{vu_x} v_x + \beta g_v = -q v_x \\
&\beta f_{uu} u_x^2 + 2\beta f_{uv} u_x v_x + \beta f_{vv} v_x^2 + g g_v + f g_u \\
&\qquad + g_v g_{v_x} v + g_{v_x} g_u u_x = 0 \\
&g_{v_x}^2 + \alpha g_u + \beta f_v = -q u_x
\end{aligned} \tag{3.36}$$

解方程组 (3.35)~(3.36) 得:

$f = \sigma_0 + \frac{\gamma^2}{r}\alpha v + \frac{q\gamma}{3r}v^2 + (\frac{q}{3r})^2\alpha v^3 + (-\frac{q}{\beta}v + \gamma)u_x$

$g = -(-\frac{q}{\beta}v + \gamma)v_x$

故得 Benjamin 方程的 Bäcklund 变换为

$$u_t = \alpha v_{xx} + \sigma_0 + \frac{\gamma^2}{r}\alpha v + \frac{q\gamma}{3r}v^2 + (\frac{q}{3r})^2\alpha v^3 + (-\frac{q}{\beta}v + \gamma)u_x$$

$$v_t = (\beta u_x + \tfrac{q}{2\beta}v^2 - \gamma v)_x$$

利用该变换. 我们可得到 Benjamin 方程的非线性叠加公式.

记 $w_0 \xrightarrow{\gamma} w_1$ 表示解 $w_1$ 由参数的 Bäcklund 变换作用于解 $w_0$ 得到. 设

$$w_0 \xrightarrow{\gamma_1} w_1 \xrightarrow{\gamma_2} w_3, w_0 \xrightarrow{\gamma_2} w_2 \xrightarrow{\gamma_1} w_3$$

利用 Bäcklund 变换的可换性得:

$$(w_1 - w_0)_t = [\beta(w_1 + w_0)_x + \frac{q}{2\beta}(w_1 - w_0)^2 - \gamma_1(w_1 - w_0)]_x$$

$$(w_2 - w_0)_t = [\beta(w_2 + w_0)_x + \frac{q}{2\beta}(w_2 - w_0)^2 - \gamma_2(w_2 - w_0)]_x$$

$$(w_3 - w_1)_t = [\beta(w_3 + w_1)_x + \frac{q}{2\beta}(w_3 - w_1)^2 - \gamma_2(w_3 - w_1)]_x$$

$$(w_3 - w_2)_t = [\beta(w_3 + w_2)_x + \frac{q}{2\beta}(w_3 - w_1)^2 - \gamma_1(w_3 - w_2)]_x$$

分别将前二式与后二式相减, 然后再相加就得到叠加公式

$$w_3 = [\tfrac{q}{\beta}(w_2 - w_1) + \gamma_1 - \gamma_2]^{-1}\{2\beta(w_2 - w_1)_x + (\gamma_2 - \tfrac{q}{\beta}(w_2 - w_1)) \times (w_0 - w_1 - w_2) + \gamma_1(2w_1 - w_0)D(t)\}$$

其中 $D(t)$ 是关于 $t$ 的任意函数.

与 Bäcklund 变换有关的另一个问题是无穷守恒律. 将 $u = 2w - v$ 代入 Bäcklund 变换公式得

$$v_t = [-\beta v_x + \frac{q}{2\beta}v^2 - \gamma v + 2\beta w_x]_x \tag{3.37}$$

$$2w_t = \alpha v_{xx} + \sigma_0 + \frac{\gamma^2}{r}\alpha v + \frac{q\gamma}{3r}v^2 + (\frac{q}{3r})^2\alpha v^3 + (-\frac{q}{\beta}v + \gamma)u_x + v_t \tag{3.38}$$

令

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \gamma^{-n}$$

并代入 (3.37) 且比较 $\gamma$ 的各次幂的系数得:

$$f_{1t} = (-\beta f_{1x} - f_2)_x \quad (n = 1)$$
$$f_{nt} = (-\beta f_{nx} + \tfrac{q}{2\beta}\sum_{i+j=n}^{\infty} f_i f_j - f_{n+1})_x \quad (n > 2)$$

将该公式代入 (3.38) 就能得到 $f_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的递推公式.

## 3.3 AKNS 方程族的 Bäcklund 变换

设给定等谱 AKNS 方程族对应的线性问题为 [47]

$$\Phi_x = M(q,r,\eta)\Phi, \Phi_y = N(q,r,\eta)\Phi \tag{3.39}$$

其中

$$M(q,r,\eta) = \begin{pmatrix} -\eta & q \\ r & \eta \end{pmatrix}$$
$$N(q,r,\eta) = \begin{pmatrix} A(q,r,\eta) & B(q,r,\eta) \\ C(q,r,\eta) & -A(q,r,\eta) \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

且矩阵 $N(q,r,\eta)$ 的元 $A(q,r,\eta)$ 与 $B(q,r,\eta)$,$C(q,r,\eta)$ 各是谱参数 $\eta$ 的 $n$ 次与 $n-1$ 次多项式，满足边值条件

$$A(0,0,\eta) = -\frac{1}{2}(2\eta)^n, B(0,0,\eta) = 0, C(0,0,\eta) = 0 \tag{3.41}$$

又给定与 (3.39) 有完全相同的形式但位势为 $(u,v)$ 的线性问题

$$\Psi_x = M(u,v,\eta)\Psi, \Psi_t = N(u,v,\eta)\Psi \tag{3.42}$$

其中

$$M(u,v,\eta) = \begin{pmatrix} -\eta & u \\ v & \eta \end{pmatrix}$$
$$N(u,v,\eta) = \begin{pmatrix} A(u,v,\eta) & B(u,v,\eta) \\ C(u,v,\eta) & -A(u,v,\eta) \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

现在要确定关于 $\eta$ 是线性的规范变换

$$\Psi = T\phi, T = \begin{pmatrix} \eta + a & b \\ c & \eta + d \end{pmatrix} \tag{3.44}$$

使线性问题 (3.39) 化成 (3.43). 容易验证当变换 (3.44) 将谱问题 (3.39) 化成 (3.42) 时，变换矩阵 $T$ 满足关系式

$$T_x = M(u,v,\eta)T - TM(q,r,\eta) \tag{3.45}$$

由此推出

$$
\begin{aligned}
&u = q + 2b, v = r - 2c, a_x = uc - rb \\
&b_x = ud - qa, c_x = va - rd, d_x = vb - qc
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

由 (3.46) 得

$$
\begin{aligned}
&a_x = qc - rb + 2bc, b_x = qd - qa + 2bd \\
&c_x = ra - rd - 2ac, d_x = rb - qc - 2bc
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

这就是矩阵 $T$ 的各元素 $a$、$b$, $c$ 及 $d$ 所满足的方程. 从其可得

$$
a + d = -h - k, \quad a^2 + bc + (h+k)a = -hk \tag{3.48}
$$

式中 $h$ 及 $k$ 是与 $t$ 及 $x$ 无关的不同常数. 令

$$
\theta(\eta) = \frac{\phi_2(\eta)}{\phi_1(\eta)} \tag{3.49}
$$

则线性问题 (3.39) 可以写成与之等价的 Ricatti 形式

$$
\begin{aligned}
&\theta_x(\eta) = r + 2\eta\theta(\eta) - q\theta^2(\eta) \\
&\theta_t(\eta) = C(q,r,\eta) + 2A(q,r,\eta)\theta(\eta) - B(q,r,\eta)\theta^2(\eta)
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

而矩阵 $T$ 的元素 $a$、$b$ 以及 $c$ 可以分别表示为

$$
a = \frac{k\theta(h) - h\theta(k)}{\theta(k) - \theta(h)}, b = \frac{h - k}{\theta(k) - \theta(h)}, c = \frac{k - h}{\theta(k) - \theta(h)}\theta(k)\theta(h) \tag{3.51}
$$

这是因为当 $\eta = h$ 或 $k$ 时, 变换矩阵 $T$ 的行列式为零, 所以相应的两个变换式

$$
\begin{aligned}
&\psi_1(h) = (h + a)\phi_1(h) + b\phi_2(h) \\
&\psi_2(h) = c\phi_1(h) + (h + d)\phi_2(h)
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

是线性相关的, 故存在常数 $\alpha$, 使得

$$
\psi_2(h) = \alpha\psi_1(h) \tag{3.53}
$$

将此相关式代入谱问题 (3.42) 并利用位势 $u$ 与 $v$ 的任意性知 $\psi_1(h)=0$, 于是 (3.52) 可写成

$$a+b\theta(h)=-h$$

以 $k$ 代 $h$ 又有

$$a+b\theta(k)=-k$$

这样可以解得 $a,b,c$ 的表达式. 变换 (3.44), 当谱参数 $\eta$ 与时间 $t$ 无关时也将 (3.39) 的时间发展式化为 (3.42). 事实上, 从 (3.44) 与 (3.39) 得

$$\psi_t=\tilde{N}(u,v,\eta)\psi, \tilde{N}(u,v,\eta)=(TN(q,r,\eta)+T_t)T^{-1} \tag{3.54}$$

若设

$$\tilde{N}(u,v,\eta)=\begin{pmatrix}\tilde{A}(u,v,\eta) & \tilde{B}(u,v,\eta)\\ \tilde{C}(u,v,\eta) & -\tilde{A}(u,v,\eta)\end{pmatrix} \tag{3.55}$$

则 (3.42) 与 (3.52) 的相容性条件给出 $\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C}$ 满足零曲率方程. 利用公式 (3.51) 和 (3.50) 可推得 $\tilde{A},\tilde{B},\tilde{C}$ 各是谱参数 $\eta$ 的 $n$ 次与 $n-1$ 次多项式且在 $x$ 趋向于无穷时,$b,c$ 趋于零的条件下以及它们所具有的边值条件 (3.41), 有结论

$$\tilde{N}(u,v,\eta)=N(u,v,\eta) \tag{3.56}$$

所以我们有

**定理 3.3.1** 设给定位势 $(q,r)$ 与位势 $(u,v)$ 的线性问题 (3.39) 与 (3.42). 则存在 Darboux 变换 (3.44). 将 (3.39) 化为 (3.42), 其中变换矩阵 $T$ 的元素 $a,b,c,d$ 满足方程 (3.47). 如果 $\theta(h)$ 与 $\theta(k)$ 由 Ricatti 方程组 (3.50) 所确定, 则 $a,b,c$ 可以表示成显示 (3.51), 而从线性问题 (3.39) 所生成的等谱 AKNS 方程族的 Bäcklund 变换为

$$u=q+2\frac{h-k}{\theta(k)-\theta(h)}, v=r+2\frac{h-k}{\theta(k)-\theta(h)}\theta(k)\theta(h) \tag{3.57}$$

当 (3.39) 的时间发展式的矩阵元 $A, B, C$ 是按 $\eta$ 的负幂展开时, 此定理的结论仍然成立.

利用公式 (3.57), 我们能得到修正 KdV 方程族,Sine-Gordon 方程族,KdV 方程族与非线性 Schrödinger 方程族的 Bäcklund 变换.

如果 $r = q$, 则奇数阶 AKNS 等谱方程族约化为等谱修正 KdV 方程族且 Ricatti 方程族 (3.50) 化为

$$\begin{aligned}\theta_x(\eta) &= 2\eta\theta(\eta) + q(1-\theta^2(\eta))\\ \theta_t(\eta) &= C(q,q,\eta) - 2A(q,q,\eta)\theta(\eta) - B(q,q,\eta)\theta^2(\eta)\end{aligned} \tag{3.58}$$

因为当 $A(q,q,\eta), B(q,q,\eta)$ 及 $C(q,q,\eta)$ 换成具有相同边值条件的 $-A(q,q,-\eta), C(q,q,-\eta)$ 及 $B(q,q,-\eta)$ 时零曲率方程不变, 所以应有

$$\begin{aligned}A(q,q,\eta) &= -A(q,q,-\eta)\\ B(q,q,\eta) &= C(q,q,-\eta)\\ C(q,q,\eta) &= B(q,q,-\eta)\end{aligned} \tag{3.59}$$

而 Ricatti 方程 (3.50) 的解当 $\eta = \pm h$ 时有关系式

$$\theta(-h) = \frac{1}{\theta(h)} \tag{3.60}$$

于是当取 $k = -h$ 时,(3.57) 约化为

$$u = v = q + \frac{4h\theta(h)}{1-\theta^2(h)}$$

借助 (3.58), 此等式可写成

$$u = -q + 2[\mathrm{arctanh}\,h\theta(h)]_x$$

这就是等谱修正 KdV 方程族的 Bäcklund 变换.

如果 $r = -q$,Ricatti 方程 (3.50) 约化为

$$\begin{aligned}\theta_x(\eta) &= 2\eta\theta(\eta) - q(1+\theta^2(\eta))\\ \theta_t(\eta) &= C(q,-q,\eta) - 2A(q,-q,\eta)\theta(\eta) - B(q,-q,\eta)\theta^2(\eta)\end{aligned} \tag{3.61}$$

其中系数 $A(q,-q,\eta)$、$B(q,-q,\eta)$ 及 $C(q,-q,\eta)$ 具有不变性质

$$
\begin{aligned}
A(q,-q,\eta) &= -A(q,-q,-\eta)\\
B(q,-q,\eta) &= -C(q,-q,-\eta)\\
C(q,-q,\eta) &= -B(q,-q,-\eta)
\end{aligned}
\tag{3.62}
$$

由此推知 $\theta(-h)$ 与 $\theta(h)$ 成立关系式

$$
\theta(-h) = -\frac{1}{\theta(h)}
\tag{3.63}
$$

(3.57) 约化为

$$
u = -v = q - \frac{4h\theta(h)}{1+\theta^2(h)}
$$

借助 (3.61), 此等式可写成

$$
u = -q - 2(\operatorname{arctan} h\theta(h))_x
$$

这就得到了另一类等谱修正 KdV 方程族的 Bäcklund 变换. 在此公式中以 $\frac{q_x}{2}$ 代 $\frac{u_x}{2}$, 特别得到 Sine-Gordon 方程 Bäcklund 变换其中 $\theta(\eta)$ 满足 Ricatti 方程族

$$
\begin{aligned}
\theta_x(\eta) &= 2\eta\theta(\eta) - \frac{q_x}{2}(1+\theta^2(\eta))\\
\theta_t(\eta) &= \tfrac{1}{2\eta}\cos q\theta(\eta) + \tfrac{1}{4\eta}\sin q(1-\theta^2(\eta))
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

如果 $q = 1$, 并以 $-r$ 代 $r$, 则奇数阶 AKNS 等谱方程族约化为等谱修正 KdV 方程族且 Ricatti 方程族 (3.50) 化为

$$
\begin{aligned}
\theta_x(\eta) &= -r + 2\eta\theta(\eta) - \theta^2(\eta)\\
\theta_t(\eta) &= C(1,-r,\eta) - 2A(1,-r,\eta)\theta(\eta) - B(1,-r,\eta)\theta^2(\eta)
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

取 $k=-h$, 由 (3.48) 得 $a=-d$, 于是 (3.47) 写成

$$
b_x = -2a(1+b)
$$

由此推知 $b=-1$, 将其代入 (3.51) 有

$$
\theta(-h) - \theta(h) = -2h,\ \ a = \theta(h) - h, c = \theta(h)(\theta(h) - 2h)
$$

所以 (3.46) 化成

$$u = -1, v = -r - 2\theta(h)(\theta(h) - 2h) \tag{3.66}$$

因为当 $A(-1,r,\eta), -B(-1,r,\eta)$ 及 $-C(-1,r,\eta)$ 换成具有相同边值条件的 $A(1,-r,\eta)$、$B(1,-r,\eta)$ 及 $C(1,-r,-\eta)$ 时零曲率方程不变, 所以应有

$$\begin{aligned} A(-1,r,\eta) &= A(1,-r,\eta) \\ B(-1,r,\eta) &= -B(1,-r,\eta) \\ C(-1,r,\eta) &= -C(1,-r,\eta) \end{aligned} \tag{3.67}$$

从而推知 $(1, -r)$ 与 $(-1,r)$ 或 $(-1,v)$ 满足同一方程, 因此 (3.66) 是等谱 KdV 方程族 Bäcklund 变换.

如果 $r = q^*$, 则奇数阶 AKNS 等谱方程族约化为非线性 Schrödinger 方程族且 Ricatti 方程族 (3.50) 化为

$$\begin{aligned} \theta_x(\eta) &= q^* + 2\eta\theta(\eta) - q\theta^2(\eta) \\ \theta_t(\eta) &= C(q,q^*,\eta) - 2A(q,q^*,\eta)\theta(\eta) - B(q,q^*,\eta)\theta^2(\eta) \end{aligned} \tag{3.68}$$

由零曲率方程的不变性与相同的边值条件, 有

$$\begin{aligned} &A^*(q,q^*,\eta^*) = -A(q^*,q,-\eta), B^*(q,q^*,\eta^*) = C(q,q^*,-\eta) \\ &C^*(q,q^*,\eta^*) = B(q,q^*,-\eta) \end{aligned} \tag{3.69}$$

于是 (3.68) 的解满足关系式

$$\theta(-\eta) = \frac{1}{\theta^*(\eta^*)} \tag{3.70}$$

在公式 (3.51) 中取 $k = -h^*$ 时, 代入上式给出

$$\begin{aligned} a &= -\frac{h + h^*\theta(h)\theta^*(h)}{1 - \theta(h)\theta^*(h)} \\ b &= \frac{(h + h^*)\theta^*(h)}{1 - \theta(h)\theta^*(h)} \\ c &= -\frac{(h + h^*)\theta^*(h)}{1 - \theta(h)\theta^*(h)} \end{aligned} \tag{3.71}$$

(3.57) 约化为

$$u = v^* = q + \frac{2(h+h^*)}{1-\theta(h)\theta^*(h)}\theta^*(h)$$

这就是非线性 Schrödinger 方程族的 Bäcklund 变换.

如果 $r = -q^*$, 则奇数阶 AKNS 等谱方程族约化为非线性 Schrödinger 方程族且 Ricatti 方程族 (3.50) 化为

$$\begin{aligned} &\theta_x(\eta) = -q^* + 2\eta\theta(\eta) - q\theta^2(\eta) \\ &\theta_t(\eta) = C(q,-q^*,\eta) - 2A(q,-q^*,\eta)\theta(\eta) - B(q,-q^*,\eta)\theta^2(\eta) \end{aligned} \tag{3.72}$$

由零曲率方程的不变性与相同的边值条件, 有

$$\begin{aligned} A^*(q,-q^*,\eta^*) &= -A(q,-q^*,-\eta) \\ B^*(q,-q^*,\eta^*) &= -C(q,-q^*,-\eta) \\ C^*(q,-q^*,\eta^*) &= -B(q,-q^*,-\eta) \end{aligned} \tag{3.73}$$

于是 (3.68) 的解满足关系式

$$\theta(-\eta) = -\frac{1}{\theta^*(\eta^*)} \tag{3.74}$$

这种情形对应的非线性 Schrödinger 方程族的 Bäcklund 变换为

$$u = -v^* = q - \frac{2(h+h^*)}{1+\theta(h)\theta^*(h)}\theta^*(h)$$

## 3.4 Bäcklund 变换的 WTC 方法及其改进

Weiss,Tabor 和 Carnevale 对偏微分方程给出了 Painleve 性质的自然推广 (简称 WTC 方法) . 他们的方法引出内涵丰富的形式, 由此人们可以导出 Bäcklund 变换和 Lax 表示等.

WTC 方法是设非线性演化方程

$$u_t = K(u, u_x, \cdots) \tag{3.75}$$

的解 $u(x,t)$ 在流形 $\Phi(x,t)=0$ 上奇异. 在 $\Phi=0$ 的邻域内构造 (3.75) 的解

$$u(x,t)=\frac{1}{\Phi^{\alpha}}\Sigma_{j=0}^{\infty}u_j(x,t)\Phi^j \tag{3.76}$$

其中, $\alpha$ 为正整数.$\Phi, u_j(x,t)$ 为解析函数, 将 (3.76) 代入 (3.75), 对 $j=0,1,2,\cdots$ 确定 $\alpha$ 和 $u_j$ 的递推关系. 通过截尾可得 Bäcklund 变换. 将此方法作进一步改进.

设 (3.75) 的解具有如下形式

$$u=\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}f(\Phi)+u_1 \tag{3.77}$$

其中,$u_1$ 为 (3.75) 的解,$f.\Phi$ 为待定函数.$\alpha$ 为正整数.

1) 通过比较, 使 $\Phi_x$ 出现在有关 $u$ 的最高导数项中与出现在有关 $u$ 的非线性项中的最高次幂相同. 可确定出 $\alpha$.

2) 将 (3.77) 代入 (3.75), 令 $\Phi_x$ 最高次幂的系数为 0, 可确定 $f(\Phi)$.

3) 令 $f$ 的各阶导数的系数为 0. 可得到 $\Phi$ 应满足的相容条件.

经过上述步骤即可确定 Bäcklund 变换, 这种方法非常直观、自然. 绕开 Painleve 质性进行递推关系和截尾讨论.

下面通过应用于几个著名的方程加以说明.

**例 3.4.1** 考虑 Burgers 方程

$$u_t+uu_x-\sigma u_{xx}=0 \tag{3.78}$$

设其解具有如下形式

$$u=\frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}f(\Phi)+u_1(x,t) \tag{3.79}$$

比较使 $\Phi_x$ 出现在 $uu_x$ 与 $-\sigma u_{xx}$, 中的最高次幂相同, 可得 $\alpha=1$, 故

$$u=f(\Phi)\Phi_x+u_1(x,t) \tag{3.80}$$

将 (3.80) 代入 (3.79), 整理可得

$$
\begin{aligned}
u_t + uu_x - \sigma u_{xx} = (f'f'' - \sigma f''')\Phi_x^3 + (f''\Phi_t\Phi_x \\
+f'^2\Phi_x\Phi_{xx} + u_1 f''\Phi_x^2 - 3\sigma f''\Phi_x\Phi_{xx}) + (\Phi_{xx} + u_{1x}\Phi_x \\
+u_1\Phi_{xx} - \sigma\Phi_{xxx})f' + (u_{1t} + u_1 u_{1x} - \sigma u_{1xx}) = 0
\end{aligned} \tag{3.81}
$$

令

$$
f'f'' - \sigma f''' = 0 \tag{3.82}
$$

解之得

$$
f = -2\sigma \ln\Phi \tag{3.83}
$$

从而

$$
f'^2 = 2\sigma f'' \tag{3.84}
$$

将 (3.84) 代入 (3.81) 并利用 (3.82), 得

$$
\begin{aligned}
u_t + uu_x - \sigma u_{xx} = (\Phi_t\Phi_x + u_1\Phi_x^2 - \sigma\Phi_x\Phi_{xx})f'' \\
+\frac{\partial}{\partial_x}(\Phi_t + u_1\Phi_x - \Phi_{xx})f' + u_{1t} + u_1 u_{1x} - \sigma u_{1xx} = 0
\end{aligned}
$$

令 $f'', f'''$ 的系数及 $u_1$ 的函数组合项为 0, 得

$$
\begin{cases}
\Phi_x(\Phi_t + u_1\Phi_x - \sigma\Phi_{xx}) = 0 \\
\frac{\partial}{\partial_x}(\Phi_t + u_1\Phi_x - \sigma\Phi_{xx}) = 0 \\
u_{1t} + u_1 u_{1x} - \sigma u_{1x} = 0
\end{cases}
$$

当 $u_1 = 0$ 时, 得到 Cole-Hopf 变换 $u = -2\sigma\dfrac{\Phi_x}{\Phi}$.

当 $u_1 = \Phi$ 时, 得到 Backlund 变换 $u = -2\sigma\dfrac{\Phi_x}{\Phi} + \Phi$.

**例 3.4.2** 考虑 KdV 方程

$$
u_t + uu_x + \sigma u_{xxx} = 0 \tag{3.85}
$$

设其解具有如下形式

$$u = f''\Phi_x^2 + f'\Phi_{xx} + u_1 \tag{3.86}$$

将 (3.86) 代入 (3.85)，整理可得

$$\begin{aligned}
u_t + uu_x + \sigma u_{xxx} &= (f''f''' + \sigma f^{(5)})\Phi_x^5 + (3f''^2\Phi_x^3\Phi_{xx} \\
&+ f'f'''\Phi_x^3\Phi_{xx} + 10f^{(4)}\Phi_x^3\Phi_{xx}) + (f'''\Phi_x^2\Phi_t + f'f''\Phi_x^2\Phi_{xxx} \\
&+ 3f'f''\Phi_x\Phi_{xx}^2 + f'''u_1\Phi_x^3 + 15\sigma f'''\Phi_x\Phi_{xx}^2 + 10\sigma f'''\Phi_x^2\Phi_{xxx}) \\
&+ (2f''\Phi_x\Phi_{xt} + f''\Phi_t\Phi_{xx} + f''u_{1xx}\Phi_x^2 + f'^2\Phi_{xx}\Phi_{xxx} \\
&+ 3f''u_1\Phi_x\Phi_{xx} + 10\sigma f''\Phi_{xx}\Phi_{xxx}) + 5\sigma f''(\Phi_x\Phi_{xxxx}) + (\Phi_{xxt} \\
&+ u_{1x}\Phi_{xx} + u_1\Phi_{xxx} + \Phi_{xxxxx})f' + (u_{1t} + u_1u_{1x} + \sigma u_{1xxx}) = 0
\end{aligned} \tag{3.87}$$

令

$$f''f''' - \sigma f^{(5)} = 0 \tag{3.88}$$

解之得

$$f = 12\sigma\ln\Phi \tag{3.89}$$

从而

$$\begin{aligned}
&f''^2 = -2\sigma f^{(4)}, f'f''' = -4\sigma f^{(4)} \\
&f'f'' = -6\sigma f''', f'^2 = -12\sigma f''
\end{aligned} \tag{3.90}$$

将 (3.90) 代入 (3.87) 并利用 (3.88)，得

$$\begin{aligned}
u_t + uu_x + \sigma u_{xxx} &= (\Phi_x^2\Phi_t + 4\sigma\Phi_x^2\Phi_{xxx} - 3\sigma\Phi_x\Phi_{xx}^2 + u_1\Phi_x^3)f''' \\
&+ (2\Phi_x\Phi_{xt} + \Phi_t\Phi_{xx} + u_{1x}\Phi_x^2 - 12\sigma\Phi_{xx}\Phi_{xxx} + 3u_1\Phi_x\Phi_{xx} \\
&+ 10\sigma\Phi_{xx}\Phi_{xxx} + 5\sigma\Phi_x\Phi_{xxxx})f'' + (\Phi_{xxt} + u_{1x}\Phi_{xx} + u_1\Phi_{xxx} \\
&+ \sigma\Phi_{xxxxx})f' + (u_{1t} + u_1u_{1x} + \sigma u_{1xxx}) = 0
\end{aligned} \tag{3.91}$$

令 $f'', f''', f'$ 的系数及最后括号为 0, 得

$$\begin{cases} \Phi_x(\Phi_x\Phi_t + 4\sigma\Phi_x\Phi_{xxx} - 3\sigma\Phi_{xx}^2 + u_1\Phi_x^2) = 0 \\ \Phi_x(\Phi_{xt} + u_1\Phi_{xx} + \sigma\Phi_{xxxx}) + \frac{\partial}{\partial x}(\Phi_x\Phi_t + 4\sigma\Phi_x\Phi_{xxx} \\ \qquad -3\sigma\Phi_{xx}^2 + u_1\Phi_x^2) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{xt} + u_1\Phi_{xx} + \sigma\Phi_{xxxx}) = 0 \\ u_{1t} + u_1u_{1x} + \sigma u_{1xxx} = 0 \end{cases} \tag{3.92}$$

将 (3.89) 代入 (3.86) , 得 Bäcklund 变换

$$u = 12\sigma\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\Phi + u_1 \tag{3.93}$$

其中 $\Phi$. $u_1$ 满足 (3.92). 从 (3.92) 解出 $\Phi_t$ . 再对 $x$ 微分. 并令 $\Phi_x = v^2$, 可得 Lax 表示

$$\begin{cases} 6\sigma v_{xx} + u_1v = \lambda v \\ 2v_t + u_1v_x + \lambda v_x + 2\sigma v_{xxx} = 0 \end{cases} \tag{3.94}$$

# 第四章　非线性发展方程的相似约化

本章中我们主要讨论利用古典 Lie 群和非古典 Lie 群约化 ODEs 和 PDEs 的基本思想、特别是利用 Bäcklund 变换思想求解非线性发展方程的相似约化 (相似解). 此外, 本章还将 CK 方法作了进一步推广, 可求得比用 CK 方法更多的相似解, 并用非古典 Lie 群法予以验证.

## 4.1　古典和非古典 Lie 群法

利用古典 Lie 群方法已经成功地构造了常微分方程的解；通过 Lie 群算法可找到给定 ODEs 的无穷小变换；对于确定的变换 Lie 群, 可找到它所容许的最一般的 $n$ 阶的 ODEs. 利用古典 Lie 群求 ODEs 的解可机械化处理, 李志斌教授已成功地编制了计算部分微分方程行波解的算法程序, 对此这里不再赘述.

对于 $k$ 阶偏微分方程

$$F(x, u, u_1, \cdots, u_k) = 0 \tag{4.1}$$

其中 $x = (x_1, \cdots, x_n), u$ 分别为自变量和因变量,$u_j$ 为 $u$ 关于 $x$ 的所有 $j$ 次偏导数的向量：

$$u_{i_1,\cdots,i_j} = \frac{\partial^j y}{\partial x_{i_1}, \cdots, \partial x_{i_j}}, j = 1, \cdots, n$$

方程 (4.1) 可看作空间 $(x, u, u_1, \cdots, u_k)$ 中的一个曲面.

**定义 4.1.1**　若曲面 (4.1) 是单参数 Lie 变换群

$$\begin{cases} x^* = X(x, u; \varepsilon) \\ u^* = U(x, u; \varepsilon) \end{cases} \tag{4.2}$$

的 $k$ 次扩张变换群的不变曲面, 则称方程 (4.1) 关于 Lie 变换群 (4.2) 是不变的或称方程 (4.1) 容许 Lie 变换群 (4.2).

与 ODE 情形类似, 方程 (4.1) 关于 Lie 变换群 (4.2) 是不变的等价于方程 (4.1) 的所有解族在 Lie 变换群 (4.2) 下是不变的. 若方程 (4.1) 关于 Lie 变换群 (4.2) 不变, 则称 (4.2) 为方程 (4.1) 的对称群. 这里规定对重复指标求和. 设

$$X = \xi_i(x, u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u}$$

是 Lie 变换群 (4.2) 的无穷小生成元. 其 $k$ 次扩张记为

$$X^{(k)} = X + \eta_i^{(1)}(x, u, u_1)\frac{\partial}{\partial u_i} + \cdots + \eta_{i_1\cdots i_k}^{(k)}(x, u, u_1, \cdots, u_k)\frac{\partial}{\partial u_{i_1,\cdots,i_k}}$$

**PDEs 不变性准则:** 偏微分方程 (4.1) 关于 Lie 变换群 (4.2) 不变的充分必要条件是

$$X^{(k)}F(x, u, u_1, \cdots, u_k)|_{F=0} = 0 \tag{4.3}$$

**定义 4.1.2** 称 $u = \theta(x)$ 是方程 (4.1) 关于 Lie 变换群 (4.2) 的不变解, 若

i) $u = \theta(x)$ 是方程 (4.1) 的解;

ii) $u = \theta(x)$ 是 Lie 变换群 (4.2) 的不变曲面, 即

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x, \theta(x))\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \eta(x, \theta(x)) \tag{4.4}$$

(4.4) 称为不变解的"不变曲面条件", 不变解也称为相似解.

**定义 4.1.3** 设

$$X_\alpha = \sum_{j=1}^{n}\xi_{\alpha j}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}, X_\beta = \sum_{j=1}^{n}\xi_{\beta j}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

称 $[X_\alpha, X_\beta]$ 为 $X_\alpha$,$X_\beta$ 的变换元, 且 $[X_\alpha, X_\beta] = X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha$.

**Lie 群第二基本定理**

设 $X_\alpha$ $(\alpha = 1, \cdots, r)$ 是 $r$ 个参数的 Lie 变换群的无穷小生成元, 对于任意的 $\beta, \gamma$, 都有

$$[X_\beta, X_\gamma] = \sum_{\alpha=1}^{\gamma} c_{\beta\gamma}^{\alpha} X_\alpha$$

其中 $c^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 称为结构常数.

**定义 4.1.4** 设 $L$ 是实数域 $R$ 上的线性空间, 若在 $L$ 上有二元运算

$$L \times L \to L : (u, v) \to [u, v]$$

满足:

i) 双线性性: 任意的 $u, v, w \in L, a, b \in R$, 有

$$[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w], [u, av + bw] = a[u, v] + b[u, w]$$

ii) 反对称性: $[u, v] = -[v, u]$

iii) Jacobi 恒等式: $[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$, 则称 $L$ 为 $R$ 上的 Lie 代数.

范恩贵教授在其博士毕业论文 [1] 中, 给出了一个典型例子 —— 耦合可积无色散方程的无穷小生成元、Lie 代数结构及其相似解, 这里就不在举例说明了.

对于用非古典 Lie 群方法约化 PDEs, 我们通过一个具体例子加以说明.

**例 4.1.1** 考虑著名的热传导方程

$$\theta_t - \theta_{xx} = 0 \tag{4.5}$$

对于群变换

$$\begin{cases} x' = x'(x, t, u; \varepsilon) \\ t' = t'(x, t, u; \varepsilon) \\ u' = u'(x, t, u; \varepsilon) \end{cases} \tag{4.6}$$

根据 (4.6), 假定解曲面 $u = \theta(x, t) \to u' = \theta'(x', t')$. 我们先考虑 (4.6) 的无穷小变换

$$\begin{cases} x' = x + \varepsilon X(x, t, u) + o(\varepsilon^2) \\ t' = t + \varepsilon T(x, t, u) + o(\varepsilon^2) \\ u' = u + \varepsilon U(x, t, u) + o(\varepsilon^2) \end{cases} \tag{4.7}$$

则由不变性准则知：

$$\theta(x+\varepsilon X,t+\varepsilon T)=\theta(x,t)+\varepsilon U(x,t,\theta)+o(\varepsilon^2)$$

展开上式并令 $o(\varepsilon)$ 项系数为 0 得：

$$X(x,t,\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}+T(x,t,\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t}=U(x,t,\theta) \tag{4.8}$$

根据 (4.7), 有

$$\theta'(x',t')=\theta(x,t)+\varepsilon U(x,t,\theta)+o(\varepsilon^2)$$

求导并合并同类项后得

$$\frac{\partial\theta'}{\partial x'}=\theta_x+\varepsilon[U_x+(U_u-X_x)\theta_x-T_x\theta_t-X_u\theta_x^2-T_u\theta_x\theta_t]+o(\varepsilon^2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\theta'}{\partial x'^2}=&\ \theta_{xx}+\varepsilon[U_{xx}+(2U_{xu}-X_{xx})\theta_x-T_{xx}\theta_t+(U_{uu}-2X_{xu})\theta_x^2\\&-T_{xu}\theta_x\theta_t-X_{uu}\theta_x^3-T_{uu}\theta_x^2\theta_t+(U_u-2X_x)\theta_{xx}-2T_x\theta_{xt}\\&-3X_u\theta_{xx}\theta_x-T_u\theta_{xx}\theta_t-2T_u\theta_{xt}\theta_x]+o(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\theta'}{\partial t'}=\theta_t+\varepsilon[U_t+(U_u-T_t)\theta_t-X_t\theta_x-T_u\theta_t^2-X_u\theta_x\theta_t]+o(\varepsilon^2)$$

因 $\theta'(x',t')$ 也是不变曲面解, 所以有

$$\frac{\partial\theta'}{\partial t'}-\frac{\partial^2\theta'}{\partial x'^2}=0$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta'}{\partial t'}-\frac{\partial^2\theta'}{\partial x'^2}=&\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\varepsilon[U_t-U_{xx}+(X_{xx}-X_t-2U_{xu})\theta_x\\&+(T_{xx}+U_u-T_t)\theta_t+(2X_{xu}-U_{uu})\theta_x^2+2(T_{xu}-X_u)\theta_x\theta_t\\&-T_t\theta_t^2+X_{uu}\theta_x^3+T_{uu}\theta_x^2\theta_t+(2X_x-X_u)\theta_{xx}+2T_x\theta_{xt}\\&+3X_u\theta_{xx}\theta_x+T_u\theta_{xx}\theta_t+2T_u\theta_{xt}\theta_x]+o(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{4.9}$$

对 (4.8) 假定 $T \neq 0$, 并作变换

$$\frac{X}{T} \to X, \frac{U}{T} \to U$$

则不变曲面条件化为

$$\theta_t = U - X\theta_x \tag{4.10}$$

对 (4.10) 关于 $x$ 微分得:

$$\theta_{tx} = (U_x - XU) + (U_u - X_x + X^2)\theta_x - X_u\theta_x^2 \tag{4.11}$$

利用 (4.10) 和 (4.11) 式,(4.9) 式的右边可化为关于 $\theta_x$ 的幂次形式, 令各幂次的系数为 0 得到如下的非线性超定方程组

$$X_{uu} = 0 \tag{4.12}$$

$$U_{uu} - 2X_{xu} + 2XX_u = 0 \tag{4.13}$$

$$X_t - 2UX_u + 2U_{xu} - X_{xx} + 2XX_x = 0 \tag{4.14}$$

$$U_{xx} - 2UX_x - U_t = 0 \tag{4.15}$$

对 (4.13) 关于 $u$ 微分 1 次, 对 (4.14 ) 关于 $u$ 微分 3 次, 则有

$$U_{uuu} + 2X_uX_u = 0, U_{uuu}X_u = 0$$

再利用 (4.13) 则知:

$$U_{uu} = 0, X_u = 0$$

于是

$$U = uC(x, t) + D(x, t), X = A(x, t)$$

根据 (4.14) 有

$$A_t + 2AA_x - A_{xx} = -2C_x \tag{4.16}$$

根据 (4.15) 有

$$C_t - C_{xx} + 2A_xA - A_{xx} = 0, D_t - D_{xx} + 2A_xD = 0 \tag{4.17}$$

设 $A = 2\varphi_x$ 代入 (4.16) 有:

$$C = \varphi_{xx} - \varphi_t - 2\varphi_x^2 + M(t)$$

若 $M(t)$=0, 则由 (4.17) 知:

$$\begin{aligned}\varphi_{xxxx} - 2\varphi_{txx} - 4\varphi_x\varphi_{xxx} - 8\varphi_{xx}\varphi_{xt} + 4\varphi_{xx}\varphi_t \\ +8\varphi_{xx}\varphi_x^2 + \varphi_{tt} + 4\varphi_x\varphi_{xt} = 0\end{aligned}$$

当 $\varphi_{xxx} = 0$ 时, 就约化为古典情形的结果了. 如果 $C = 0$, 则 (4.17) 就约化为 Burgers 方程. 设 $A = -\frac{H_x}{H}$, 其中 $H$ 是热方程的一个解, 则可证明相应的解满足关系 $\theta_x = H$. 一般来说, 非古典 Lie 群解比古典解更一般化, 因此求非线性 PDEs 的非古典解显得更有意义.

## 4.2 利用非线性函数变换约化微分方程

范恩贵教授、张鸿庆教授巧妙地利用齐次平衡法求出了一大批非线性发展方程的相似约化, 可是有些方程直接利用这种方法无法约化, 还需要作一个恰当的变换.

**例 4.2.1** 考虑 Boussinesq 方程

$$q_{tt} = q_{xx} + 3(q^2)xx + q_{xxxx} \tag{4.18}$$

令 $q = u_x$ 代入 (4.18) 得:

$$u_{tt} = u_{xx} + 6u_xu_{xx} + u_{xxxx} \tag{4.19}$$

对于 (4.19) 而言, 令非线性函数变换为:

$$u = f'(\varphi)\varphi_x + v \tag{4.20}$$

其中 $v=v(x,t),\varphi=\varphi(x,t)$ 为待定函数. 将 (4.20) 代入 (4.19) 得:

$$
\begin{aligned}
&(f^{(5)}+6f''f''')\varphi_x^5+(10f^{(4)}+18f''^2+6f'f''')\varphi_x^3\varphi_{xx}\\
&+15f'''\varphi_x\varphi_{xx}^2+10f'''\varphi_x^2\varphi_{xxx}+6f'''\varphi_x^3v_x+f'''\varphi_x^3-f'''\varphi_t^2\varphi_x\\
&+6f'f''\varphi_x^2\varphi_{xxx}+18f'f''\varphi_x\varphi_{xx}+10f''\varphi_{xx}\varphi_{xxx}+5f''\varphi_x\varphi_{xxx}\\
&+6f''\varphi_x^2v_{xx}+18f''\varphi_x\varphi_{xx}v_x+3f''\varphi_x\varphi_{xx}-f''\varphi_{tt}\varphi_x-2f''\varphi_t\varphi_{xt}\\
&+6f'^2\varphi_{xx}\varphi_{xxx}+f'(\varphi_{xxx}+\varphi_x^5)+6f'\varphi_{xx}v_{xx}+6f'\varphi_{xxx}v_x\\
&-f'\varphi_{xtt}+v_{xxxx}+v_{xx}+6v_xv_{xx}-v_{tt}=0
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

为了使 (4.21) 是关于 $f(\varphi)$ 的常微分方程, $f(\varphi)$ 的不同导数和幂次的系数比率必须是 $\varphi$ 的函数. 因此可设

$$\varphi_x^3\varphi_{xx}=\varphi_x^5\Gamma_1(\varphi) \tag{4.22}$$

$$15\varphi_x\varphi_{xx}^2+10\varphi_x^2\varphi_{xxx}+6\varphi_x^2v_x+\varphi_x^3-\varphi_t^2\varphi_x=\varphi_x^5\Gamma_2(\varphi) \tag{4.23}$$

$$6\varphi_x^2\varphi_{xxx}+18\varphi_{xx}^2\varphi_x=\varphi_x^5\Gamma_3(\varphi) \tag{4.24}$$

$$
\begin{aligned}
&10\varphi_{xx}\varphi_{xxx}+5\varphi_x\varphi_{xxxx}+6\varphi_x^2v_{xx}+18\varphi_x\varphi_{xx}v_x\\
&\quad+3\varphi_x\varphi_{xx}-\varphi_{tt}\varphi_x-2\varphi_t\varphi_{xt}=\varphi_x^5\Gamma_4(\varphi)
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

$$6\varphi_{xx}\varphi_{xxx}=\varphi_x^5\Gamma_5(\varphi) \tag{4.26}$$

$$\varphi_{xxx}+\varphi_{5x}+6\varphi_{xx}v_{xx}+6\varphi_{xxx}v_x-\varphi_{xtt}=\varphi_x^5\Gamma_6(\varphi) \tag{4.27}$$

$$v_{xxxx}+v_{xx}+6v_xv_{xx}-v_{tt}=\varphi_x^5\Gamma_7(\varphi) \tag{4.28}$$

其中 $\Gamma_i(\varphi)$ 为待定函数. 为了解 (4.22)~(4,28), 有三个自由度可供选择, 为固定之, 可采用如下的规则.

**规则 1:** 若 $\varphi(x,t)$ 是由方程 $\Omega(\varphi)=\Omega_0(x,t)$ 确定, 其中 $\Omega(\varphi)$ 是任意可逆函数, 则可取 $\Omega(\varphi)=\varphi$(作变换 $\varphi\to\Omega^{-1}(\varphi)$);

**规则 2:** 如果 $v=v_0(x,t)+\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Omega(\varphi)$, 则可取 $\Omega=0$(作变换 $f\to f-\Omega$). 利用以上二个规则, 解方程 (4.22)~(4,28) 得:

$$\Gamma_1(\varphi)=\Gamma_3(\varphi)=\Gamma_4(\varphi)=\Gamma_5(\varphi)=\Gamma_6(\varphi)=0$$

$$\Gamma_2(\varphi)=A,\ \Gamma_7(\varphi)=\frac{A\theta^2x}{3\theta^2},\ \varphi=\theta x+\sigma$$

于是我们得到 (4.19) 的相似解为

$$u=\theta f'(\theta)+\frac{(a_1x+b_1)^3}{18a_1\theta^2}-\frac{x}{6}+\frac{A\theta^2x}{6}$$

显然 $u$ 关于 $x$ 求导就是 (4.18) 的相似解, 其中 $\theta=a_1t+a_0,\sigma=b_1t+b_0$, $a_i,b_i(i=0,1)$ 是常数. $f(\varphi)$ 满足

$$f^{(5)}+6f''f'''+Af'''+\frac{Aa_1b_1\theta^{-5}}{3}=0$$

设 $f'(\varphi)=y(\varphi)$, 则我们得到 (4.19) 的另一个相似约化:

$$u=(a_1x+a_0)y(\varphi)+\frac{(a_1x+b_1)^3}{18a_1(a_1t+a_0)^2}-\frac{x}{6}+\frac{Ax(a_1t+a_0)^2}{6}$$

这里 $y(\varphi)$ 满足

$$y^{(4)}+6y'y''+Ay''+\frac{Aa_1b_1}{3}(a_1t+a_0)^{-5}=0$$

该方程是一个 Painleve IV 方程.

## 4.3 直接约化法及其改进

我们知道, 利用古典和非古典 Lie 变换群法约化偏微分方程虽然有效, 但是涉及到大量的繁杂计算, 并且不能得到尽可能多的相似约化. 最近,PeterA.Clarkson 和 MartinD.Kruskal 发现了直接约化方法 (CK 方法) 这种方法不涉及群理论, 计算量少且可得到 Lie 群方法往

往得不到的新的相似约化形式. 是约化方程的有效工具. 用这种方法可处理一大批非线性 PDEs.

CK 方法的一般步骤是：对于非线性 PDEs, 比如二个自变量的 PDEs

$$F(u, u_x, u_t, \cdots) = 0 \tag{4.29}$$

可以证明寻找如下形式的约化

$$u = \alpha(x,t) + \beta(x,t)w(z), \quad z = z(x,t) \tag{4.30}$$

将 (4.30) 代入 (4.29), 然后将 $w(z)$ 的相同导数和幂次的项放在一起, 其导数由 $\alpha, \beta$ 及 $z$ 的函数构成. 为了使所得方程为 $w(z)$ 的 ODE, 要求这些项系数之比仅为 $z$ 的函数, 于是可得到关于 $\alpha, \beta, z$ 的超定方程组, 由此得到我们所需要的相似约化. 在确定 $\alpha, \beta, z$ 时, 有三个自由度可选, 为了确定它们, 可采取如下规定：

**规定 1：** 若 $\alpha(x,t) = \alpha_0(x,t) + \beta(x,t)\Omega(z)$, 则取 $\Omega = 0$;

**规定 2：** 若 $\beta(x,t) = \beta_0(x,t)\Omega(z)$, 则取 $\Omega = 1$;

**规定 3：** 若 $z(x,t)$ 由 $\Omega(z) = z_0(x,t)$ 确定, 其中 $\Omega(z)$ 可逆, 则可取 $\Omega(z) = z_0$.

本节中, 我们改进 CK 法, 即将 (4.30) 式改写为

$$h(u) = \alpha(x,t) + \beta(x,t)w(z(x,t)) \tag{4.31}$$

其中 $h(u)$ 是关于 $u$ 的任意可导函数. 可见 (4.31) 是 (4.30) 的推广形式.

下面我们以广义 Burgers 方程

$$u_t + u_x + u_{xx} + h(u)u_x = 0 \tag{4.32}$$

为例说明我们的方法, 并将所得的相似解用非古典 Lie 群方法加以验证. 分三种情况.

(一) $z_x \neq 0$ 情形. 将 (4.31) 代入 (4.32) 得:

$$\begin{aligned}&\beta z_x^2 w_{xx} + (\beta z_x + 2\beta_x z_x + \beta z_{xx} + \alpha\beta z_x + \beta z_t)w_z + \beta^2 z_x w w_x \\ &\quad + \beta\beta_x w^2 + (\alpha\beta_x + \beta\alpha_x + \beta_x + \beta_{xx} + \beta_t)w + \alpha_t + \alpha_x + \alpha_{xx} + \alpha\alpha_x \\ &= \frac{h''}{h'^2}(\alpha_x^2 + \beta_x w^2 + \beta^2 z_x^2 w_z^2 + 2\alpha_x\beta_x w + 2\alpha_x\beta z_x w_x + 2\beta\beta_x w w_z)\end{aligned} \tag{4.33}$$

下面考虑几种情况.

1) 对于任意的 $h(u)$. 如果 $\frac{h''}{h'^2} = f(w)$, 我们可取 $u = w$, 于是 $w(z)$ 满足

$$w_{zz} + ww_z - f(w)w_z^2 = 0$$

该方程等价于行波约化.

2) $\alpha, \beta$ 至少有一个不是常数, 设

$$(\frac{h''}{h'^2})^p = \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} a_j h^j}{\sum\limits_{i=0}^{n} b_i h^i}$$

则 (4.33) 化为

$$\begin{aligned}&[\Sigma_{i=0}^n a_i(\alpha + \beta w)^i][\beta z_x^2 w_{zz} + \beta^2 z_x w w_z + (\alpha\beta z_x + \beta z_{xx} + 2\beta_x z_x \\ &\quad + \beta z_x + \beta z_t)w_z + \beta\beta_x w^2 + (\beta_{xx} + \beta\alpha_x + \beta_x + \beta_t + \alpha\beta_x)w \\ &\quad + \alpha_t + \alpha_x + \alpha_{xx} + \alpha\alpha_x]^p \\ &= [\Sigma_{i=0}^n b_i(\alpha + \beta w)^i](\alpha_x^2 + 2\alpha_x\beta_x w + 2\alpha_x\beta z_x w_z + \beta^2 z_x^2 w_z^2 + \beta_x^2 w^2 \\ &\quad + 2\beta\beta_x z_x w w_z)^p\end{aligned} \tag{4.34}$$

(a) 如果 $a_j = 0$ $(j = 0, 1, 2, \cdots, m)$, 则可设 $h = \lambda u, \lambda$ 是常数.(4.32) 约化为

$$u_t + u_x + u_{xx} + \lambda u u_x = 0 \tag{4.35}$$

是一个广义 Burgers 方程.

(b) 如果 $m=n=0, a_0\neq 0, p=b_0=1, \dfrac{h''}{h'^2}=a_0, h=-\dfrac{1}{a_0}\ln(u+k)$, 则 (4.34) 约化为:

$$\begin{aligned}&\beta z_x^2 w_{zz}+\beta^2 z_x w w_z+(\alpha\beta z_x+\beta z_{xx}+2\beta_x z_x+\beta z_x+\beta z_t)w_z\\ &\quad+\beta\beta_x w^2+(\beta_{xx}+\alpha_x\beta+\alpha\beta_x+\beta_x+\beta_t)w+\alpha_x+\alpha_{xx}+\alpha\alpha_x+\alpha_t\\ &=a_0(\alpha_x^2+2\alpha_x\beta_x w+2\alpha_x\beta z_x w_z+2\beta\beta_x z_x w w_z+\beta_x^2 w^2+\beta^2 z_x^2 w_z^2)\end{aligned} \tag{4.36}$$

我们用 $w_{zz}$ 的系数作为规范系数, 并设

$$\begin{aligned}&\beta^2 z_x=\beta^2 z_x^2\Gamma_1(z), \beta\beta_x-a_0\beta_x^2=\beta^2 z_x^2\Gamma_2(z)\\ &\alpha\beta z_x+\beta z_{xx}+2\beta_x z_x+\beta z_x+\beta z_t-2a_0\alpha_x\beta z_x=\beta^2 z_x^2\Gamma_3(z)\\ &\beta_{xx}+\alpha_x\beta+\alpha\beta_x+\beta_x-2\alpha_x\beta_x+\beta_t=\beta^2 z_x^2\Gamma_4(z)\\ &\beta^2 z_x-2a_0\beta\beta_x z_x=\beta^2 z_x^2\Gamma_5(z),\quad \beta z_x^2=\beta^2 z_x^2\Gamma_6(z)\\ &\alpha_x+\alpha_{xx}+\alpha\alpha_x-a_0\alpha_x^2+\alpha_t=\beta^2 z_x^2\Gamma_7(z)\end{aligned} \tag{4.37}$$

解 (4.37) 得: $\Gamma_1(z)=\Gamma_5(z)=\Gamma_7(z)=1, \Gamma_2(z)=\Gamma_3(z)=\Gamma_4(z)=0, \Gamma_6(z)=c_0$. (4.32) 的相似约化为:

$$\frac{1}{a_0}\ln(u+k)=c_0 t+w(z), z=x+\frac{c_0}{2}t^2+c_3 t+c_4$$

$w(z)$ 满足 ODE:

$$w_{zz}+ww_z-a_0 w_z^2+c_0=0$$

(c) 取 $m=0, n=p=1, \dfrac{h''}{h'^2}=\dfrac{a}{h+q}$, 设 $\alpha+q=0, q=0$, 其中 $\alpha=\dfrac{a_0}{b_1}, q=\dfrac{b_0}{b_1}$. 当 $a\neq 1$, 解 $\dfrac{h''}{h'^2}=\dfrac{a}{h}$, 得: $h=c_5 u^{\frac{1}{1-a}}$,(4.34) 约化为

$$\begin{aligned}&\beta z_x^2 w_{zz}+\beta^2 z_x w w_z+(\beta z_{xx}+2\beta_x z_x+\beta z_x+\beta z_t)w_z+\beta\beta_x w^2\\ &\quad+(\beta_{xx}+\beta_x+\beta_t)w=\frac{a}{\beta w(z)}(2\beta\beta_x z_x w w_z+\beta_x^2 w^2+\beta^2 z_x^2 w_z^2)\end{aligned}$$

类似于 (4.36), 我们有

$$\beta^2 z_x = \beta^2 z_x^2 \Gamma_1(z),\ \beta^3 z_x = \beta^2 z_x^2 \Gamma_2(z),$$
$$\beta^2 z_{xx} + 2\beta\beta_x z_x + \beta^2 z_x + \beta^2 z_t - 2a\beta\beta_x z_x = \beta^2 z_x^2 \Gamma_3(z),$$
$$\beta^2 \beta_x = \beta^2 z_x^2 \Gamma_4(z)$$
$$\beta\beta_{xx} + \beta\beta_x + \beta\beta_t - \alpha\beta_x^2 = \beta^2 z_x^2 \Gamma_5(z)$$

解方程组得：$\Gamma_1(z) = \Gamma_2(z) = \Gamma_5(z) = 1, \Gamma_3(z) = z, \Gamma_4(z) = 0.$

(4.32) 的相似约化为：

$$cu^{\frac{1}{1-a}} = \theta(t)w(z), z = \theta(t)x + \sigma(t), \theta' = \theta^3, \sigma' - \theta^2\sigma + \theta = 0$$

其中 $w(z)$ 满足 $ww_{zz} + w^2 w_z + zww_z + w^2 - aw_z^2 = 0$. 当 a=1, $h = c_7 e^{c_6 u}$ 时, (4.32) 的相似约化为：

$$c_7 e^{c_6 u} = \theta(t)w(z), z(x,t) = \theta(t)x + \sigma(t), \theta' = \theta^3, \sigma' - \theta^2\sigma + \theta = 0$$

其中 $w(z)$ 满足

$$ww_{zz} + w^2 w_z + zww_z + w^2 - aw_z^2 = 0$$

(二) $z_x = 0$ 情形. 设 (4.32) 的相似约化为：

$$h(u) = \alpha(x,t) + \beta(x,t)w(t) \tag{4.38}$$

将 (1.38) 代入 (4.32) 得：

$$\begin{aligned}&\beta w_z + (\beta_t + \beta_x + \beta_{xx} + \beta\alpha_x + \alpha\beta_x)w + \alpha_t + \alpha_x \\ &+\alpha_{xx} + \alpha\alpha_x + \beta\beta_x w^2 = \frac{h''}{h'^2}(\alpha_x^2 + 2\alpha_x\beta_x w + \beta_x^2 w^2)\end{aligned} \tag{4.39}$$

为使 (4.39) 是关于 $w(z)$ 的常微分方程, 我们可得到如下三类相似约化：

3) $h(u) = \dfrac{2}{x-t+c}$, 其中 $h(u) = \lambda u$. 即 (4.32) 约化为 (4.35). 对此上面已经讨论过了.

4) $h(u) = \frac{2}{x-t} + w(t)$, 其中 $h = -\dfrac{1}{a_0}\ln(u+k), w(t)$ 满足

$$w' - \frac{2}{(x-t)^2}w - \frac{4a_0}{(x-t)^4} = 0 \tag{4.40}$$

5) $h(u) = xw(t)$, 这里 $h(u)$ 由积分方程确定:

$$\int_a^{h(u)} e^{-\frac{a_0}{2}s^2}\mathrm{d}s = \lambda u + k, a_0 \neq 0 \tag{4.41}$$

$w(t)$ 满足 $xw' + w + xw^2 - a_0 w^3 = 0$.

下面我们用非古典对称 Lie 群方法对上面得到的结果验证. 考虑单参数 $(\varepsilon)$ 的关于 $(x, t, u)$ 的无穷小变换 Lie 群:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + \varepsilon X(x,t,u) + O(\varepsilon^2) \\ \tilde{t} = t + \varepsilon T(x,t,u) + O(\varepsilon^2) \\ \tilde{u} = u + \varepsilon U(x,t,u) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \tag{4.42}$$

无穷小生成元是 $\Pi = X(x,t,u)\dfrac{\partial}{\partial x} + T(x,t,u)\dfrac{\partial}{\partial t} + U(x,t,u)\dfrac{\partial}{\partial u}$. 下面考虑两种情形.

情形 1: $T \neq 0$. 不失一般性, 取 $T = 1$, 对 (4.34) 应用非古典 Lie 群变换群法可得下列决定方程组:

$$\begin{aligned} &X_{uu} = 0, \qquad U_{uu} - 2XX_u + 2X_u - 2X_{xu} + 2hX_u = 0 \\ &-X_t + 2X_uU + 2U_{xu} - X_{xx} + (1+h)X_x + h'U - 2XX_x = 0, \\ &U_t + U_{xx} + 2UX_x + (1+h)U_x = 0 \end{aligned} \tag{4.43}$$

直接求解 (4.43) 并不容易.

(i) 取 $X = c =$ 常数, $U = 0$, $f$ 为任意, 则得到 1) 的相似约化.

(ii) 取 $h'' = 0$ 即 $h = \lambda u$, 则 (4.32) 约化为 (4.35), 相应于情形 (a).

(iii) 取 $h = -\dfrac{1}{a_0}\ln(u+k)$, $X = \dfrac{t}{a_0}$, $U = u + k$, 则它等价于相似约化 (b).

(iv) 取 $h = c_5 u^{\frac{1}{1-a}}$, $X = \dfrac{1}{2}(\dfrac{x}{t} + 1)$, $U = \dfrac{a-1}{2t}$, 则它等价于相似约化 (c).

情形 2: $T = 0$. 不失一般性取 $X = 1$, 易见决定方程组为:

$$U_t + U_x + U_{xx} + 2U_{xu}U + U_{uu}U^2 + h'U^2 + hU_x = 0 \tag{4.44}$$

(v) 在 (4.44) 中, 取 $h=\lambda u, U=\dfrac{u}{x-t}$, 则它等价于相似约化 3.

(vi) 取 $h=-\dfrac{1}{a_0}\ln(u+k), U=\dfrac{a_0(u+k)}{t}$, 则它等价于相似约化 4.

(vii) 若 $h(u)$ 满足 (4.40), 且 $U=\dfrac{h}{x-t}e^{-\frac{a_0}{2}h^2}$, 则它等价于相似约化 5.

# 第五章　非线性演化方程族的生成及其可积性

本章主要介绍非线性演化方程族的生成及其可积性. 可积性包括 Lax 可积和 Liouville 可积. 本章主要工作是:

(1) 利用屠格式生成新的 Hamilton 方程族;

(2) 延拓屠格式的应用范围, 将 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 上的屠格式推广到 loop 代数 $\tilde{A}_M$ 上去, 得到了含多个位势的 Liouville 意义下的可积 Hamilton 系统; 再利用高阶对称约束, 求出了约束流的 Lax 表示及其 Hamilton 结构;

(3) 利用屠格式求可积耦合系统, 即从一个等谱问题出发, 利用屠格式构造一个新的可积系统. 为了求出更多的可积耦合, 又分为二种情况: 情形一是等谱问题中的位势所在方阵之迹为零, 情形二是该迹不为零. 为了沟通这两种情形, 我们作了等价的 Lax 对变换, 即通过构造一个恰当的变换, 将 Lax 对 $\{C_1, D_1\}$ 转化为 Lax 对 $\{C_2, D_2\}$ 且 $\{C_1, D_1\}$ 和 $\{C_2, D_2\}$ 的相容性条件都是 $Au = 0$.

## 5.1　可积性与屠格式

对于可积系统的一般理论和方法, 许多文献中已作了细致的概括. 为使本章系统化, 这里再作一下简单重复.

### 5.1.1　可积性

设 $S$ 为定义在 $R$ 上的 Schwartz 空间,$S^p = S \otimes S \otimes \cdots \otimes S$,

$$u(x,t) = (u_1(x,t), \cdots, u_p(x,t)) \in S^p, x, t \in R$$

**定义 5.1.1**　对于 $f, g \in S^p$, 定义其内积为

$$(f, g) = \int fg\mathrm{d}x = \int \sum_{i=1}^{p} f_i g_i \mathrm{d}x$$

**定义 5.1.2** 一个线性算子 $J=J(u): S^p \longrightarrow S^p$ 称为辛算子或 Hamilton 算子, 如果满足:

(i) $J^*=-J$, 即 $(Jf,g)=(f,J^*g)$, 对于任意的 $f,g\in S^p$;

(ii)$(J'(u)[JF]G,H)+(J'(u)[JG]H,F)+(J'(u)[JH]F,G)=0$, 即 Jacobi 恒等式成立, 其中

$$J'(u)[f]=\frac{d}{d\varepsilon}J(u+\varepsilon f)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

为 Gateaux 导数.

**定义 5.1.3** 如果 $J$ 为辛算子, 定义 Poisson 括号:

$$\{f,g\}=(\frac{\delta f}{\delta u},J\frac{\delta g}{\delta u})$$

若 $\{f,g\}=0$, 则称 $f,g$ 对合, 称

$$u_t=J\frac{\delta H}{\delta u} \tag{5.1}$$

为广义 Hamilton 方程,$H$ 为 Hamilton 函数, 其中变分导数 $\frac{\delta}{\delta u}=(\frac{\delta}{\delta u_1},\cdots,\frac{\delta}{\delta u_p})^T$.

对于线性等谱问题:

$$L\psi=\lambda\psi,\psi_t=M\psi$$

其中 $L,M$ 为 $n\times n$ 矩阵, 根据相容性条件得到 Lax 方程:

$$L_t+[L,M]=0 \tag{5.2}$$

对于线性等谱问题:

$$\psi_x=U\psi,\psi_t=N\psi$$

其相容性条件为零曲率方程

$$U_t-N_x+[U,N]=0 \tag{5.3}$$

**定义 5.1.4** 若发展方程

$$u_t = K(u) \tag{5.4}$$

可表示为 Lax 方程 (5.2) 或零曲率方程 (5.3), 则称它为 Lax 可积; 若 (5.4) 可写成广义 Hamilton 方程 (5.1), 且存在可列个两两对合的守恒密度, 则称 (5.4) 是 Liouville 可积的.

关于发展方程守恒密度, 如下定理.

**定理 5.1.1** 设 $J, L$ 为 $S^p$ 上的两个算子, 若有

(i) $J^* = -J, JL = L^*J$;

(ii) 对于 $f(u) \in S^p$ 存在一系列函数 $\{H_n\}$, 满足

$$\{H_m, H_n\} = \{H_n, H_m\}, L^n f(u) = \frac{\delta H_n}{\delta u}$$

则 $\{H_n\}$为发展方程族

$$u_t = L^n f(u) = \frac{\delta H_n}{\delta u}$$

的公共守恒密度且两两对合.

### 5.1.2 谱问题的代数化

**定义 5.1.5** 设 $G$ 为复数域 $C$ 上的 Lie 代数, 若 $x, y \in G$, 都有 $[x, y] - 0$, 则称 $G$ 为可交换 Lie 代数.

**定义 5.1.6** 若对 $\forall G_1 \subset G$, 有 $[G_1, G_1] \subset G_1$, 则称 $G_1$ 为 $G$ 的一个子代数, 若 $[G_1, G] \subset G_1$, 则称 $G_1$ 为 $G$ 的理想.

**定义 5.1.7** 若 $G$ 中不含非平凡不可交换的理想 $G_1$, 则称 $G$ 为单 Lie 代数.

**定义 5.1.8** 若 $G$ 可分解成单 Lie 代数 $G_i$ 的直和: $G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$, 且每个 $G_i$ 为 $G$ 的理想, 则称 $G$ 为半单 Lie 代数.

若 $G$ 为半单 Lie 代数矩阵, 则 Killing-Cartan 形 $< x, y >$ 与迹 $tr(xy)$ 之比为常数, 所以可记

$$< x, y >= \mathrm{tr}(xy)$$

设 $G$ 为 $C$ 上有限维 Lie 代数,$\widetilde{G}$ 为相应的无穷维 loop 代数 $\widetilde{G} = G \otimes C[\lambda, \lambda^{-1}]$, 其中 $C[\lambda, \lambda^{-1}] = \{\sum\limits_{k \in z} c_k \lambda^k | c_k \in C\}$ 为 $C$ 上关于 $\lambda$ 的 Laurent 多项式全体. 若 $\{e_1, \cdots, e_p\}$ 为 $G$ 的一组基, 则 $\{e_1(n), \cdots, e_p(n), | n \in Z\}$ 构成 $\widetilde{G}$ 的一组基, 其中

$$e_i(n) = e_i \otimes \lambda^n = e_i \lambda^n$$

**定义 5.1.9** 称 $x_0 \in \widetilde{G}$ 为伪正则元, 如果对
$\mathrm{Ker}adx_0 = \{x \big| x \in \widetilde{G}, [x, x_0] = 0\}, \mathrm{Im}adx_0 = \{x \big| \exists y \in \widetilde{G}, x = [y, x_0]\}$
满足

(i) $\tilde{G} = \mathrm{Ker}adx_0 \oplus \mathrm{Im}adx_0$;

(ii) $\mathrm{Ker}adx_0$ 为可交换的.

对于 $e \otimes \lambda^n \in \widetilde{G}$, 定义它的阶为: $\deg(e \otimes \lambda^n) = n$.

考虑等谱问题

$$\psi_x = U(u, \lambda)\psi \tag{5.5}$$

设

$$U = e_0(\lambda) + u_1 e_1(\lambda) + \cdots + u_p e(\lambda) \in \widetilde{G}$$
$$u = (u_1, \cdots, u_p) \in S^p, e_0(\lambda), \cdots, e_p(\lambda) \in \widetilde{G}$$

且满足

(i) $e_0, \cdots, e_p$ 线性无关;

(ii) $e_0$ 为 $\widetilde{G}$ 中的伪正则元;

(iii) $\varepsilon_0 > 0, \varepsilon > \varepsilon_i$ 其中 $\varepsilon_i = \deg(e_i)$.

定义秩为:

$$\mathrm{rank}(x) = \deg(x), \mathrm{rank}(\lambda) = \mathrm{rank}(x\lambda) - \mathrm{rank}(x), x \in \widetilde{G}$$

$\mathrm{rank}(u_i) = \varepsilon_0 - \varepsilon_i, \mathrm{rank}(\partial) = \varepsilon_0, \mathrm{rank}(\beta) = 0, \beta$ 为常数. 于是 $U$ 为同秩的, 即

$$\mathrm{rank}(e_0(\lambda)) = \cdots = \mathrm{rank}(u_p e_p(\lambda))$$

**定理 5.1.2** 对于等谱问题 (5.5) 中的 $U(u,\lambda)\in\widetilde{G}$, 设 $V$ 为伴随方程 $V_x=[U,V]$ 的同秩解, 则有如下迹恒等式

$$\frac{\delta}{\delta u}<V,\frac{\partial U}{\partial\lambda}>=\lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda^{\gamma}<V,\frac{\partial U}{\partial u}>) \tag{5.6}$$

### 5.1.3 屠格式

屠规彰教授建立了一种生成 Liouville 可积的广义 Hamilton 方程族的简便格式, 被马文秀博士称为屠格式, 主要步骤如下:

1) 求解伴随方程 $V_x=[U,V]$ 的同秩解;

2) 寻找 $\Delta_n\in\widetilde{G}$, 使 $V^{(n)}=(\lambda^nV)_++\Delta_n$ 满足

$$V_x^{(n)}-[U,V^{(n)}]=h_1^{(n)}e_1+\cdots+h_p^{(n)}e_p$$

则零曲率方程 $U_t-V_x^{(n)}+[U,V^{(n)}]=0$, 产生一族 Lax 可积发展族

$$u_{it}=h^{(n)}(u),(i=1,\cdots,p) \tag{5.7}$$

其 Lax 表示为:

$$\begin{cases}\psi_x=U\psi\\ \psi_t=V^{(n)}\psi\end{cases}$$

3) 设发展方程 (5.7) 可由 Hamilton 算子 $J$ 与递推算子 $L$ 表示为

$$u_t=JL^nf(u) \tag{5.8}$$

再利用迹恒等式 (5.6) 可把 (5.8) 写成 Hamilton 形式

$$u_t=JL^nf(u)=J\frac{\delta H_n}{\delta u} \tag{5.9}$$

4) 若上述 $J,L$ 满足 $J^*=-J,JL=L^*J$, 但 $J$ 不是辛算子或 $J$ 为辛算子但 $JL\neq L^*J$, 则可积性不能由定理 5.1.1 判定. 屠规彰教授另辟蹊径, 同样证明了它们是 Liouville 意义下的 Hamilton 系统, 其主要思想是将上面屠格式中的 2) 和 4) 两条分别用下面两个定理代替.

**定理 5.1.3** 如果存在矩阵 $\Delta(u)$ 和 $p$ 个函数使 $[\mu(U(\mu)-U(\lambda))/(\mu-\lambda), V(\mu)]+\Delta_x(\mu)-[U(\lambda),\Delta(\mu)]$

$$-f_1(\mu,u)e_1(\lambda)+\cdots+f_p(\mu,u)e_p(\lambda)$$

则由零曲率方程给出发展方程族

$$u_{t_n}=(f_{1_n},\cdots,f_{p_n})^T \tag{5.10}$$

**定理 5.1.4** 如果存在算子 $J:S^p\to S^p$, 使得

$$J\lambda^k(<V,\frac{\partial U}{\partial u_1}>,\cdots,<V,\frac{\partial U}{\partial u_p}>)^T=(f_1(\lambda,u),\cdots,f_p(\lambda,u))^T$$

且 $J$ 为辛算子, 则 (5.10) 可表示为 Hamilton 形式:

$$u_{t_n}=J\frac{\delta H_{n+k}}{\delta u} \tag{5.11}$$

演化方程族 (5.11) 在 Liouville 意义下可积且 $\{H_m\}$ 构成两两对合的守恒密度.

## 5.2 广义热传导方程族及其 Hamilton 结构

选取 loop 代数 $\widetilde{A}_1$ 的子代数的基为:

$$\begin{cases} h(n)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda^{2n} & 0\\ 0 & \lambda^{2n}\end{pmatrix}, e(n)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \lambda^{2n+1}\\ \lambda^{2n+1} & 0\end{pmatrix}\\ f(n)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \lambda^{2n+1}\\ -\lambda^{2n+1} & 0\end{pmatrix}\\ [h(m),e(n)]=f(m+n),[h(m),f(n)]=e(m+n)\\ [f(m),e(n)]=h(m+n+1)\\ \deg h(n)=2n,\deg e(n)=\deg f(n)=2n+1 \end{cases}$$

考虑线性等谱问题

$$\begin{cases} \psi_x=U\psi,\lambda_t=0\\ U=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda^2 & (q+r)\lambda\\ (q-r)\lambda & -\lambda^2\end{pmatrix}=h(1)+qe(0)+rf(0)\\ \text{rank}(U)=\text{rank}(\partial)=\deg h(1)=\text{rank}(\lambda)-2\\ \text{rank}(q)=\text{rank}(r)=1. \end{cases} \tag{5.12}$$

将

$$V = \sum_{m>0} (a_m h(-m) + b_m e(-m) + c_m f(-m)) \tag{5.13}$$

代入辅助方程

$$V_x = [U, V] \tag{5.14}$$

得递推关系:

$$\begin{cases} c_{m+1} = b_{mx} + ra_m, b_{m+1} = c_{mx} + qa_m \\ a_{mx} = -qb_{mx} + rc_{mx}, b_0 = c_0 = 0, a_0 = \beta = \text{const} \neq 0 \\ a_1 = \frac{\beta}{2}(r^2 - q^2), b_1 = \beta q, c_1 = \beta r \\ a_2 = \beta rq_x - \beta qr_x + \frac{3\beta}{8}(r^2 - q^2)^2, b_2 = \beta r_x + \frac{\beta}{2}q(r^2 - q^2) \\ c_2 = \beta q_x + \frac{\beta}{2}r(r^2 - q^2), \text{rank}(a_m) = 2m \\ \text{rank}(b_m) = \text{rank}(c_m) = 2m - 1, \text{rank}(V) = 0 \end{cases} \tag{5.15}$$

记

$$\begin{aligned} V_+^{(n)} &= (\lambda^{2n} V)_+ \\ &= \textstyle\sum_{m=0}^{n} (a_m h(n-m) + b_m e(n-m) + c_m f(n-m)) \\ V_-^{(n)} &= \lambda^{2n} V - V_+^{(n)} \end{aligned} \tag{5.16}$$

则 (5.14) 可写为:

$$-V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = V_{-x}^{(n)} - [U, V_-^{(n)}]$$

上式左端所含基元的阶数 (deg)≥0, 右端阶数 (deg)<1, 于是 $-V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] \in Ch(0) + Ce(0) + Cf(0)$,C 表示复数集, 并且

$$V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = (qc_{n+1} - rb_{n+1})h(0) - c_{n+1}e(0) - b_{n+1}f(0)$$

取 $V^{(n)} = V_+^{(n)} + \Delta_n, \Delta_n = -a_n h(0)$, 则由零曲率方程

$$U_t - V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] = 0 \tag{5.17}$$

确定可积系统

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t &= \begin{pmatrix} c_{n+1} - ra_n \\ b_{n+1} - qa_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{nx} \\ c_{nx} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial & 0 \\ 0 & -\partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ -c_n \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} b_n \\ -c_n \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.18}
$$

由递推关系 (5.15) 知:

$$
\begin{pmatrix} b_{m+1} \\ -c_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q\partial^{-1}q\partial & -\partial - q\partial^{-1}r\partial \\ -\partial + r\partial^{-1}q\partial & r\partial^{-1}r\partial \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_m \\ -c_m \end{pmatrix} \tag{5.19}
$$

于是 (5.18) 又可写成

$$
\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t = J \begin{pmatrix} b_n \\ -c_n \end{pmatrix} = JL^{n-1} \begin{pmatrix} \beta q \\ -\beta r \end{pmatrix} \tag{5.20}
$$

特别地, 当 $n = 1$ 时,(5.20) 约化为平凡方程

$$
q_t = \beta q_x, r_t = \beta r_x
$$

当 $n = 2$ 时,(5.20) 约化为非线性发展方程组

$$
\begin{cases}
q_t = \beta r_{xx} - \dfrac{3}{2}\beta q^2 q_x + \beta q r r_x + \dfrac{\beta}{2} q_x r^2 \\
r_t = \beta q_{xx} + \dfrac{3}{2}\beta r^2 r_x - \beta q r q_x - \dfrac{\beta}{2} r_x q^2
\end{cases}
$$

在该方程组中, 令 $q = r = u$, 则得到著名的热传导方程

$$
u_t = \beta u_{xx}
$$

下面考虑方程族 (5.20) 的 Hamilton 结构及其 Liouville 可积性. 记

$$
V = ah(0) + be(0) + cf(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & (b+c)\lambda \\ (b-c)\lambda & -a \end{pmatrix}
$$

$$
a = \sum_{m \geq 0} a_m \lambda^{-2m}, b = \sum_{m \geq 0} b_m \lambda^{-2m}, c = \sum_{m \geq 0} c_m \lambda^{-2m}
$$

将

$$< V, \frac{\partial U}{\partial q} > = \frac{1}{2} b\lambda^2, < V, \frac{\partial U}{\partial r} > = -\frac{1}{2} c\lambda^2$$

$$< V, \frac{\partial U}{\partial \lambda} > = \frac{1}{2}(2a + qb - rc)\lambda$$

代入迹恒等式

$$\frac{\delta}{\delta u} < V, \frac{\partial U}{\partial \lambda} > = \lambda^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \lambda^{\gamma} \begin{pmatrix} < V, \frac{\partial U}{\partial q} > \\ < V, \frac{\partial U}{\partial r} > \end{pmatrix} \right), u = (q, r)^T$$

得:

$$\frac{\delta}{\delta u} [(2a + qb - rc)\lambda] = \lambda^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial \lambda} \begin{pmatrix} b\lambda^{\gamma+2} \\ -c\lambda^{\gamma+2} \end{pmatrix}$$

比较上式中 $\lambda^{-2n+1}$ 的系数有:

$$\frac{\delta}{\delta u}(2a_n + qb_n - rc_n) = (-2n + 2 + \gamma) \begin{pmatrix} b_n \\ -c_n \end{pmatrix}$$

令 $n = 2$ 知:$\gamma = 0$. 于是

$$\frac{\delta H_n}{\delta u} = \begin{pmatrix} b_n \\ -c_n \end{pmatrix}, H_n = \frac{2a_n + qb_n - rc_n}{-2n + 2}, n \geq 2$$

至此, 由等谱问题 (5.12) 导出以下可积的 Hamilton 方程族

$$\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t = JL^{n-1} \begin{pmatrix} \beta q \\ -\beta r \end{pmatrix} = J \frac{\delta H_n}{\delta u} \tag{5.21}$$

又

$$JL = L^* J = \begin{pmatrix} -\partial q \partial^{-1} q \partial - \partial^2 & \partial q \partial^{-1} r \partial \\ \partial^2 - \partial r \partial^{-1} q \partial & -\partial r \partial^{-1} r \partial \end{pmatrix}$$

因此 $\{H_k\}$ 是一个对合系统, 且每个 $H_k$ 都是 (5.21) 的公共守恒密度, 进而 (5.21) 是 Liouville 可积系统.

今利用屠规彰教授提出的思想方法, 推求方程族 (5.20) 的公共守恒密度. 为此令

$$y = \frac{\psi_2}{\psi_1}$$

并代入 (5.12) 知:

$$y_x - u_- \mu^2 + \mu^2 y + u_+ \mu^2 y^2 = 0 \tag{5.22}$$

这里已取

$$\lambda = \mu^2, \qquad 2u_+ = q + r, \quad 2u_- = q - r$$

令

$$y = \mu^{-1} + \sum_{i=0}^{\infty} y_i \mu^{-i} \tag{5.23}$$

代入 (5.22) 并比较 $\mu^{-i}$ 前的系数. 可依次得到

$$\begin{aligned} & y_0 = 0, y_1 = -2, y_2 = -\frac{1}{2}(q + r) \\ & y_{n+2} + y_{nx} + 2u_+ y_{n+1} + u_+ \sum_{i+j=n+2} y_i y_j = 0 \end{aligned} \tag{5.24}$$

设方程族 (5.20) 的守恒密度为 $\overline{H_i}$, 其生成函数为

$$\overline{H} = \frac{\mu^2}{2} + \mu_+ \mu^2 y \tag{5.25}$$

或由 (5.23) 式知:

$$\overline{H} = \mu^{-1} + \sum_{i \geq 0} \overline{H}_i \mu^{-i}, \overline{H}_i = u_+ y_{i+2}, i = 1, 2, \cdots$$

$\{\overline{H}_i\}$ 即为方程族 (5.20) 的一族公共守恒密度, 显见, 由 (5.24) 可递推地求出 $\overline{H}_i$ 的值.

## 5.3 一族 Liouville 可积系及其约束流的 Lax 表示、Darboux 变换

考虑 loop 代数 $\widetilde{A}_1$ 的一组基:

$$\begin{cases} h(n) = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & -\lambda^n \end{pmatrix}, e(n) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^n \end{pmatrix} \\ [h(m), e(n)] = 2e(m+n), [h(m), f(n)] = -2f(m+n) \\ [e(m), f(n)] = h(m+n) \end{cases}$$

下面利用该组基构造一个等谱问题, 用屠格式导出 Liouville 可积的广义 Unnamed 耦合反应扩散方程族; 再将该方程族中的每一个方程分解为可换的 $x$ 和 $t_n$ 两部分有限维可积 Hamilton 系统. 求出该系统的 Lax 表示, 同时还构造了所得方程族的三类 Darboux 变换.

考虑等谱问题:

$$\begin{cases} \varphi_x = U\varphi, \lambda_t = 0, \varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T \\ U = h(1) + e(0) + rf(0) \end{cases} \tag{5.26}$$

设

$$V = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m h(-m) + b_m e(-m) + c_m f(-m))$$

解辅助方程

$$V_x = [U, V]$$

得递推关系

$$\begin{aligned} a_{mx} &= -2qc_m + 2rb_m \\ b_{mx} &= -2c_{m+1} + 2ra_m \\ c_{mx} &= -2b_{m+1} + 2qa_m \\ b_0 &= c_0 = 0, a_0 = \beta, c_1 = \beta r, b_1 = \beta q, a_1 = 0 \end{aligned}$$

记

$$
\begin{aligned}
V_+^n &= (\lambda^n V)_+ \\
&= \sum_{m=0}^{n} (a_m h(n-m) + b_m e(n-m) + c_m f(n-m)) \\
V^{(n)} &= \lambda^n V - V_+^{(n)}
\end{aligned}
$$

则有

$$-V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = V_{-x}^{(n)} - [U, V^{(n)}]$$

上式左端所含基元阶数 $\geq 0$, 右端阶数 $\leq 0$, 写出右端阶数为 0 的基元得:

$$-V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = 2c_{n+1}e(0) + 2b_{n+1}f(0)$$

取

$$V^{(n)} = V_+^{(n)}, \Delta_n = 0$$

则由零曲率方程

$$U_t - V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] = 0$$

确定可积系

$$u_t = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} -b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$$

其中 $J$ 为 Hamilton 算子. 易见

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -b_{m+1} \\ c_{m+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2q\partial^{-1}r & \frac{1}{2}\partial + 2q\partial^{-1}q \\ \frac{1}{2}\partial - 2r\partial^{-1}r & 2r\partial^{-1}q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b_m \\ c_m \end{pmatrix} \\
&= L \begin{pmatrix} -b_m \\ c_m \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

于是得到与 (5.26) 相应的方程族:

$$u_t = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t = JL^n \begin{pmatrix} \beta q \\ \beta r \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

当 $n=1$ 时,(5.27) 约化为平凡方程:

$$q_t=\beta q_x, r_t=\beta r_x$$

当 $n=2, \beta=-2$ 时,(5.27) 约化为广义 Unnamed 耦合反应扩散方程

$$\begin{cases} q_t = -r_{xx}+2r^3-2q^2r \\ r_t = -q_{xx}+2r^2q-2q^3 \end{cases}$$

下面考虑方程族 (5.27) 的 Hamilton 系统.

记

$$V=ah(0)+be(0)+cf(0)=\begin{pmatrix} c & a+b \\ a-b & -c \end{pmatrix}$$

易见

$$<V,\frac{\partial U}{\partial \lambda}>=2a, <V,\frac{\partial U}{\partial q}>=-2b, <V,\frac{\partial U}{\partial r}>=2c$$

将其代入迹恒等式

$$\frac{\delta}{\delta u}<V,\frac{\partial U}{\partial \lambda}>=\lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial \lambda}(\lambda^{\gamma}<V,\frac{\partial U}{\partial u}>)$$

得:

$$\frac{\delta}{\delta u}(2a)=\lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial \lambda}\begin{pmatrix} -2b\lambda^{\gamma} \\ 2c\lambda^{\gamma} \end{pmatrix}$$

比较 $\lambda^{-n-1}$ 的系数得:

$$\begin{pmatrix} \delta/\delta q \\ \delta/\delta r \end{pmatrix}(a_{n+1})=(-n+\gamma)\begin{pmatrix} -b_{n+1} \\ c_n \end{pmatrix}$$

取 $n=1$ 得: $\gamma=0$ 于是得到 (5.27) 的 Hamilton 形式

$$u_t=\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t=JL\begin{pmatrix} -b_n \\ c_n \end{pmatrix}=J\frac{\delta H_{n+1}}{\delta u}$$

其中 $H_n=-\frac{a_{n+1}}{n}$, 易验证:

$$JL=L^*J=\begin{pmatrix} \partial-4r\partial^{-1}r & -4r\partial^{-1}q \\ -4q\partial^{-1}r & -\partial-4q\partial^{-1}q \end{pmatrix}$$

因此方程族 (5.27) 在 Liouville 意义下可积.

### 5.3.1 方程族的约束流的 Lax 表示

对于 $N$ 个不同特征值 $\lambda_j$, 下列约束系统

$$\begin{pmatrix}\varphi_{1j}\\ \varphi_{2j}\end{pmatrix}_x = U(u,\lambda_j)\begin{pmatrix}\varphi_{1j}\\ \varphi_{2j}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & q+\lambda_j\\ \lambda_j - q & -r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{1j}\\ \varphi_{2j}\end{pmatrix}$$

$$\frac{\delta H_{k+1}}{\delta u} - c_{k+1}\sum_{j=1}^{N}\frac{\delta\lambda_j}{\delta u} = 0 \tag{5.28}$$

是流 (5.27) 的不变子空间, 并称 (5.28) 为 (5.27) 的 $x$ 约束流.

考虑 (5.26) 的共轭等谱问题

$$\psi_x = U^*\psi = -U^T\psi = \begin{pmatrix} -r & q-\lambda_j\\ -q-\lambda_j & r\end{pmatrix}\psi,\ \psi = (\psi_1,\psi_2)^T \tag{5.29}$$

当 $\lim\limits_{|x|\to\infty}\psi_i = \lim\limits_{|x|\to\infty}\varphi_i = 0$ 时, 由 (5.26) 和 (5.29) 直接计算知:

$$\frac{\delta\lambda_j}{\delta u} = \frac{1}{E}\begin{pmatrix}\varphi_{1j}^2 + \varphi_{2j}^2\\ 2\varphi_{1j}^2\varphi_{2j}^2\end{pmatrix},\ E = \int_{-\infty}^{+\infty}(\varphi_1^2 - \varphi_2^2)\mathrm{d}x$$

$$L\frac{\delta\lambda_j}{\delta u} = \lambda_j\frac{\delta\lambda_j}{\delta u},\ j = 1,2,\cdots,N \tag{5.30}$$

设

$$\Phi_i = (\varphi_{i1},\cdots,\varphi_{iN})^T,\ \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)$$

$<\cdot,\cdot>$ 表示 $R^N$ 的内积 $(i = 1,2)$, 则系统 (5.28) 可浓缩为

$$\begin{cases}\Phi_{1x} = r\Phi_1 + (q+\Lambda)\Phi_2,\ \Phi_{2x} = (\Lambda - q)\Phi_1 - r\Phi_2\\ \dfrac{\delta H_{k+1}}{\delta u} = \begin{pmatrix}-b_{k+1}\\ c_{k+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} <\Phi_2,\Phi_2> + <\Phi_1,\Phi_1>\\ 2<\Phi_1,\Phi_2>\end{pmatrix}\end{cases} \tag{5.31}$$

易知:

$$\begin{pmatrix} -b_{m+1} \\ c_{m+1} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} -b_m \\ c_m \end{pmatrix} = L^{m-k} \begin{pmatrix} -b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} <\Lambda^{m-k}\varphi_1, \varphi_1> + <\Lambda^{m-k}\varphi_2, \varphi_2> \\ 2<\Lambda^{m-k}\varphi_1, \varphi_2> \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= <\Lambda^{m-k}\varphi_2, \varphi_2> - <\Lambda^{m-k}\varphi_1, \varphi_1> \\ b_{m+1} &= <\Lambda^{m-k}\varphi_1, \varphi_1> - <\Lambda^{m-k}\varphi_2, \varphi_2> \\ c_{m+1} &= 2<\Lambda^{m-k}\varphi_2, \varphi_2> \end{aligned}$$

记

$$N^{(k)} = \lambda^{(k)}V + V^{(k)} + N_0$$

则

$$N_0 = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\lambda - \lambda_j} \begin{pmatrix} \varphi_{2j}^2 - \varphi_{1j}^2 & -\varphi_{1j}^2 - \varphi_{2j}^2 \\ \varphi_{1j}\varphi_{2j} & \varphi_{1j}^2 - \varphi_{2j}^2 \end{pmatrix}$$

在约束流 (5.13) 条件下, $N^{(k)}$ 满足 $N_x^{(k)} = [U, N^k]$; 反过来, $N^{(k)}$ 的构造保证了上面公式给出了约束系统 (5.31) 的 Lax 表示. 于是有

**定理 5.3.1** 在伴随表示 $V_x = [U, V]$ 中, 将 $V$ 换成 $N^{(k)}$, 即可得到 (5.31) 的 Lax 表示:

$$N_x^{(k)} = [U, N^k]$$

其 Lax 对为

$$\psi_x = U(u, \lambda)\psi, \quad N^{(k)}\psi = \mu\psi$$

对于方程族 (5.27) 的 $t_n$ 约束流

$$\begin{pmatrix} \varphi_{1j} \\ \varphi_{2j} \end{pmatrix}_{t_n} = V^{(n)}(u, \lambda_j) \begin{pmatrix} \varphi_{1j} \\ \varphi_{2j} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_{t_n} = J \begin{pmatrix} -b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} \tag{5.32}$$

有类似结果.

**定理 5.3.2** 在 $V_t = [V^{(n)}, V]$ 中, 将 $V$ 换成 $N^{(k)}$, 即可得到 $t_n$ 约束系统 (5.32) 的 Lax 表示:

$$N_{t_n}^{(k)} = [V^{(n)}, N^{(k)}]$$

其 Lax 对为

$$\psi_{t_n} = V^{(n)}(u,\lambda)\psi,\ N^{(k)}\psi = \mu\psi$$

根据定理 5.3.1, 我们易得到关于含附加外项的约束流的 Lax 表示, 即

**定理 5.3.3** 下列系统

$$\begin{cases} \psi_{1x} = r\psi_1 + (q+\Lambda)\psi_2, \psi_{2x} = (\Lambda - q)\psi_1 - r\psi_2, \\ \dfrac{\delta H_{k+1}}{\delta u} = \begin{pmatrix} -b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} <\phi_2,\phi_2> + <\phi_1,\phi_1> \\ 2<\phi_1,\phi_2> \end{pmatrix} \end{cases} \tag{5.33}$$

的 Lax 表示为:

$$U^{(k)}_{t_k} \quad N^{(k)}_x + [U, N^{(k)}] = 0$$

其 Lax 对是

$$\varphi_x = U\varphi, \varphi_{t_k} = N^{(k)}\varphi$$

其中 $\psi_i = (\psi_{i1},\cdots,\psi_{iN})^T, i = 1,2.$

为了使约束系统 (5.28)~(5.33) 均可化为有限维可积 Hamilton 系统, 下面以约束系统 (5.31) 和 (5.32) 为例说明上面的结果.

(1) 当 $k = 0, \beta = 1$ 时,(5.31) 约化为

$$\begin{cases} b_1 = q = \quad <\phi_1,\phi_1> - <\phi_2,\phi_2> \\ c_1 = r = 2- <\phi_1,\phi_2> \end{cases} \tag{5.34}$$

此时

$$U = \begin{pmatrix} 2<\phi_1,\phi_2> & \lambda- <\phi_1,\phi_1> - <\phi_2,\phi_2> \\ \lambda+ <\phi_1,\phi_1> + <\phi_2,\phi_2> & -2<\phi_1,\phi_2> \end{pmatrix}$$

于是 (5.31) 可化为有限维 Hamilton 系统

$$\begin{cases} \varphi_{1x} = \dfrac{\partial H_0}{\partial\phi_2}, \phi_{2x} = -\dfrac{\partial H_0}{\partial\phi_1}, \\ H_0 = <\phi_1,\phi_2>^2 + \dfrac{1}{2}<\Lambda\phi_2,\phi_2> - \dfrac{1}{2}<\Lambda\phi_1,\phi_1> \\ \quad \dfrac{1}{4}<\phi_1,\phi_1>^2 - \dfrac{1}{4}<\phi_2,\phi_2>^2 - \dfrac{1}{2}<\phi_1,\phi_1><\phi_2,\phi_2> \end{cases}$$

$$(5.35)$$

其 Lax 表示为：

$$N_x^{(0)} = [U, N^{(0)}], N^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + N_0$$

对于 $n = 1$ 在 (5.34) 和 (5.35) 成立条件下

$$V^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda & <\phi_1, \phi_1> - <\phi_2, \phi_2> \\ 2 <\phi_1, \phi_2> & -\lambda \end{pmatrix}$$

此时时间部分约束系统 (5.32) 可化为有限维可积 Hamilton 系统

$$\begin{cases} \phi_{1t_1} = \dfrac{\partial H_1}{\partial \phi_2}, \phi_{2t_2} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial \phi_1} \\ H_1 = <\Lambda\phi_1, \phi_2> - <\phi_1, \phi_2>^2 - \dfrac{1}{4} <\phi_2, \phi_2>^2 \\ \qquad -\dfrac{1}{2} <\phi_1, \phi_1><\phi_2, \phi_2> \end{cases} \tag{5.36}$$

(5.36) 的 Lax 表示为：

$$N_{t_1}^{(0)} = [V^{(1)}, N^{(0)}]$$

(2) 当 $k = 2, \beta = 2$ 时，由 (5.31) 得

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4} q_{xx} = \dfrac{1}{2}(qr^2 - q^3) - \dfrac{1}{2}(<\phi_1, \phi_1> + <\varphi_2, \phi_2>) \\ \dfrac{1}{4} r_{xx} = \dfrac{1}{2}(-rq^2 + r^3) + <\phi_1, \phi_2> \end{cases} \tag{5.37}$$

引入 Jacobi-Ostrogradsky 坐标

$$\begin{cases} Q = (\varphi_{11}, \cdots, \varphi_{1N}, q_1, q_2)^T, P = (\varphi_{21}, \cdots, \varphi_{2N}, p_1, p_2)^T \\ q_1 = q, q_2 = r, p_1 = \frac{1}{4} q_x, p_2 = -\dfrac{1}{4} r_x \end{cases} \tag{5.38}$$

则 (5.31) 可化为一个有限维可积 Hamilton 系统

$$\begin{cases} Q_x = \dfrac{\partial \widetilde{H}_0}{\partial P}, P_x = \dfrac{\partial \widetilde{H}_0}{\partial Q} \\ \widetilde{H}_0 = q_2 < \phi_1, \phi_2 > + \dfrac{1}{2}q_1(< \phi_1, \phi_1 > + < \phi_2, \phi_2 >) \\ \qquad \dfrac{1}{2}(< \Lambda\phi_2, \phi_2 > - < \Lambda\phi_1, \phi_1 >) - 2p_1^2 - 2p_2^2 \\ \qquad + \dfrac{1}{8}(q_1^4 + q_2^4) - \dfrac{1}{4}q_1^3 q_2^2 \end{cases} \tag{5.39}$$

(5.39) 的 Lax 表示为:

$$N_x^2 = [U, N^{(2)}], N^{(2)} = V^{(2)} + N_0$$
$$V^{(2)} = \begin{pmatrix} 2\lambda^2 & q_2^2 + q_1^2 & 2q_1\lambda + 4p_2 \\ & 2q_2\lambda - 4p_1 & -2\lambda^2 + q_2^2 - q_1^2\lambda \end{pmatrix}$$
$$U - \begin{pmatrix} q_2 & q_1 + \lambda \\ \lambda - q_1 & -q_2 \end{pmatrix}$$

当 $n = 2$, 在 (5.38) 和 (5.39) 成立条件下,(5.32) 可化为一个有限维可积 Hamilton 系统

$$\begin{cases} Q_{t_2} = \dfrac{\partial \widetilde{H}_2}{\partial P}, P_{t_2} = -\dfrac{\partial \widetilde{H}_2}{\partial Q} \\ \widetilde{H}_2 = 2 < \Lambda^2\phi_1, \phi_2 > + (q_1^2 \quad q_2^2) < \phi_1, \phi_1 > + q_1 < \Lambda\phi_2, \phi_2 > \\ \qquad + 2p_2 < \phi_2, \phi_2 > - q_2 < \Lambda\phi_1, \phi_1 > + 2p_1 < \phi_1, \phi_1 > \end{cases} \tag{5.40}$$

其 Lax 表示为:

$$N_{t_2}^{(2)} = [V^{(2)}, U^{(2)}]$$

### 5.3.2 可积 Hamilton 系统的 Darboux 变换

易知,(5.39) 的 Lax 对为

$$\begin{cases} \psi_x = U(u,\lambda)\psi \\ N^{(2)}\psi = \mu\psi, \psi = (\psi_1, \psi_2)^T \end{cases} \tag{5.41}$$

通过规范变换

$$\overline{\psi} = T\psi, T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix} \tag{5.42}$$

(5.41) 可化为

$$\begin{cases} \overline{\psi}_x = \overline{U\psi} \\ \overline{N}^{(2)}\overline{\psi} = \mu\overline{\psi} \end{cases} \tag{5.43}$$

这里 $\overline{U}, \overline{N}^{(2)}$ 满足方程

$$T_x = \overline{U}T - TU \tag{5.44}$$

$$\overline{N}^{(2)}\overline{\psi} = \mu\overline{\psi} \tag{5.45}$$

其中 $\overline{U}, \overline{N}^{(2)}$ 的表达式与 $U, N^{(2)}$ 类同, 只需将 $U, N^{(2)}$ 中的 $q, r$ 分别用 $\overline{q}, \overline{r}$ 代替.

设 $\psi(x,t,\lambda) = (\psi_{ij})$ 和 $\overline{\psi}(x,t,\lambda) = (\overline{\psi_{ij}})$ 分别为 (5.41) 和 (5.43) 的解矩阵, 因为

$$trU = tr\overline{U} = trN^{(2)} = tr\overline{N}^{(2)} = 0$$

所以 $\det \psi_{ij}$ 与 $\det \overline{\psi_{ij}}$ 是常数且与 $x, t$ 无关.

设 $\lambda = \eta_1(\eta_1 \neq \lambda_j, j = 1, 2, \cdots, N)$ 为行列式 $\det T$ 的一个零点，则由 (5.42) 知 $\det \overline{\varphi}(x, \eta_1) = 0$，故存在常数 $\mu_1, \nu_1, |\mu_1| + |\nu_1| \neq 0$，满足

$$\mu_1 \overline{\varphi_{i1}}(x, \eta_1) + v_1 \overline{\varphi_{i2}}(x, \eta_1) = 0, i = 1, 2$$

令

$$\begin{cases} \psi_1(x, \eta_1) = \mu_1 \psi_{11}(x, \eta_1) + \nu_1 \psi_{12}(x, \eta_1) \\ \psi_2(x, \eta_1) = \mu_1 \psi_{21}(x, \eta_1) + \nu_1 \psi_{22}(x, \eta_1) \\ \delta_1 = \dfrac{\psi_2(x, \eta_1)}{\psi_1(x, \eta_1)} \end{cases} \tag{5.46}$$

则由 (5.42) 知:

$$\begin{cases} T_1 = -T_2 \delta_1 \\ T_3 = -T_4 \delta_1 \end{cases} \tag{5.47}$$

由 (5.44) 知:

$$\begin{cases} T_{1x} = (\overline{r} - r)T_1 + (q + \lambda)T_3 - (\lambda - q)T_2 \\ T_{2x} = (\overline{r} + r)T_2 + (\overline{q} + \lambda)T_4 - (\lambda + q)T_1 \\ T_{3x} = -(\overline{r} + r)T_3 + (\lambda - \overline{q})T_1 - (\lambda - q)T_4 \\ T_{4x} = -(\overline{r} + r)T_4 + (\lambda - \overline{q})T_2 - (\lambda + q)T_3 \end{cases} \tag{5.48}$$

将 (5.46)~( 5.47) 代入 (5.48)(令 $\lambda = \eta_1$) 得:

$$\begin{gathered} T_1 = \delta_1^2, T_2 = -\delta_1, T_3 = -\delta_1, T_4 = 1 \\ \overline{q} = \frac{2\delta_{1x}}{\delta_1^2 - 1} - q, \overline{r} = r + \frac{2\delta_1 \delta_{1x}}{\delta_1^2 - 1}, T_1 = \begin{pmatrix} \lambda - \eta_1 + \delta_1^2 & -\delta_1 \\ -\delta_1 & 1 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{5.49}$$

经直接计算知

$$\begin{gathered} \overline{\psi}_{1j} = \left(\sqrt{\lambda_j - \eta_1} + \frac{\delta_1^2}{\sqrt{\lambda_j - \eta_1}}\right)\psi_{1j} - \frac{\delta_1}{\sqrt{\lambda_j - \eta_1}}\psi_{2j} \\ \overline{\psi}_{2j} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j - \eta_1}}(-\delta_1 \psi_{1j} + \psi_{2j}), j = 1, 2, \cdots, N \end{gathered} \tag{5.50}$$

$\psi(x,\eta_1)$ 同时满足 (5.41). 于是我们得到了约束流 (5.39) 的第 I 类 Darboux 变换.

**定理 5.3.4** 设 $\psi=(\psi_{ij})$ 为约束流 (5.39) 的解矩阵

$$\delta_1=\frac{\mu_1\psi_{21}(x,\eta_1)+\nu_1\psi_{22}(x,\eta_1)}{\mu_1\psi_{11}(x,\eta_1)+\nu_1\psi_{12}(x,\eta_1)}$$

则当 $T,\overline{\psi_{ij}}(i=1,2;j=1,2,\cdots,N)$ 分别满足 (5.49) 和 (5.50) 时, $\overline{\psi}=T_1\psi$ 为 (5.39) . 同理, 取

$$\delta_2=\frac{\psi_1(x,\eta_2)}{\psi_2(x,\eta_2)},(\eta_2\neq\lambda_2)$$

可求得 (5.39) 的第II类 Darboux 变换.

**定理 5.3.5** 设 $\psi=(\psi_{ij})$ 为约束流 (5.39) 的基本解矩阵, 存在常数 $\mu_2,\nu_2,|\nu_2|+|\mu_2|\neq 0$. 令

$$\begin{cases}\delta_2=\dfrac{\mu_2\psi_{11}(x,\eta_2)+\nu_2\psi_{12}(x,\eta_2)}{\mu_2\psi_{21}(x,\eta_2)+\nu_2\psi_{22}(x,\eta_2)}, \quad \eta_2\neq\lambda_{2j}\\ \overline{\psi}_{1j}=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_j-\eta_2}}\psi_{1j}-\dfrac{\delta_2}{\sqrt{\lambda_j-\eta_2}}\psi_{2j}\\ \overline{\psi}_{2j}=(\sqrt{\lambda_j-\eta_2}+\dfrac{\delta_2^2}{\sqrt{\lambda_j-\eta_1}})\psi_{2j}-\dfrac{\delta_2}{\sqrt{\lambda_j-\eta_2}}\psi_{1j}\\ \overline{q}=\dfrac{2\delta_{2x}}{\delta_2^2-1}-q,\overline{r}=r-\dfrac{2\delta_{2x}}{\delta_1^2-1}\end{cases} \tag{5.51}$$

取

$$T_{11}=\begin{pmatrix}1 & -\delta_2\\ -\delta_2 & \lambda-\eta_2+\delta_2^2\end{pmatrix}$$

则变换 $\overline{\psi}=T_{11}\psi$ 为 (5.39) 的 Darboux 变换.

为求约束流 (5.39) 的第 III 类 Darboux 变换, 对第 I 类 Darboux 变换和 II 类 Darboux 变换作复合运算. 先做第 I 类 Darboux 变换

$$\overline{\psi}=T_1\psi,\overline{q}=\frac{2\delta_{1x}}{\delta_1^2-1}-q,\overline{r}=r+\frac{2\delta_1\delta_{1x}}{\delta_1^2-1}$$

再做第 II 类 Darboux 变换.

$$\tilde{\psi} = \overline{T}_1\bar{\psi}, \overline{T} = \begin{pmatrix} 1 & -\bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_2 & \lambda - \eta_2 + \bar{\delta}_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{q} = -\frac{2\bar{\delta}_{2x}}{\bar{\delta}_2^2 - 1} - \bar{q}, \tilde{r} = \bar{r} - \frac{2\bar{\delta}_2\bar{\delta}_{2x}}{\bar{\delta}_2^2 - 1}$$

于是, $\tilde{\psi} = \overline{T}\bar{\psi} = \overline{T}T_1\psi$

$$\overline{T}T_1 = \begin{pmatrix} \lambda - \eta_1 + \delta_1^2 + \delta_1\overline{\delta_2} & -\delta_1 - \overline{\delta_2} \\ -(\lambda - \eta_1 + \delta_1^2)\overline{\delta_2} - \delta_1(\lambda - \eta_2 + \bar{\delta}_2) & \lambda - \eta_1 + \delta_2^2 + \delta_1\overline{\delta_2} \end{pmatrix}$$

而 (在 $T_1$ 中取 $\eta_2 = \lambda$), 有

$$\bar{\delta}_2 = \frac{\mu_2\overline{\psi}_{11}(x, \eta_2) + \nu_2\overline{\psi}_{12}(x, \eta_2)}{\mu_2\overline{\psi}_{21}(x, \eta_2) + \nu_2\overline{\psi}_{22}(x, \eta_2)} = \frac{(\eta_2 - \eta_1 + \delta_1^2)\delta_2 - \delta_1}{1 - \delta_1\delta_2} \tag{5.52}$$

由此得到 (5.39) 的第III类 Darboux 变换.

**定理 5.3.6** 令

$$\delta_1 = \frac{\mu_1\psi_{21}(x, \eta_1) + \nu_1\psi_{22}(x, \eta_1)}{\mu_1\psi_{11}(x, \eta_1) + \nu_1\psi_{12}(x, \eta_1)}$$

$$\delta_2 = \frac{\mu_2\psi_{21}(x, \eta_2) + \nu_2\psi_{22}(x, \eta_2)}{\mu_2\psi_{11}(x, \eta_2) + \nu_2\psi_{12}(x, \eta_2)}$$

$$\hat{q} = q - \frac{2\bar{\delta}_{1x}}{\bar{\delta}_1^2 - 1} - \frac{2\bar{\delta}_{2x}}{\bar{\delta}_2^2 - 1}, \tilde{r} = r + \frac{2\bar{\delta}_1\bar{\delta}_{1x}}{\bar{\delta}_1^2 - 1} - \frac{2\bar{\delta}_2\bar{\delta}_{2x}}{\bar{\delta}_2^2 - 1}$$

$$\overline{\psi}_{1j} = \frac{1}{\sqrt{(\lambda_j - \eta_1)(\lambda_j - \eta_2)}}[(\lambda_j - \eta_1 + \delta_1^2 + \delta_1\overline{\delta_2})\psi_{1j} - (\delta_1 + \overline{\delta_2})\psi_{2j}]$$

$$\overline{\psi}_{2j} = \frac{1}{\sqrt{(\lambda_j - \eta_1)(\lambda_j - \eta_2)}}[((\eta_1 - \lambda_j - \delta_1^2)\overline{\delta_2} - \delta_1(\lambda_j - \eta_2 + \delta_2^2))\psi_{1j}$$

$$-(\delta_1\overline{\delta_2} + \bar{\delta}_2^2 + \lambda_j - \eta_2)\psi_{2j}], j = 1, 2, \cdots, N$$

$\delta_2$ 取为 (5.51), 则线性变换 $\tilde{\psi} = \overline{T}T_1\psi$ 是约束流 (5.39) 的 Darboux 变换.

另外, 定理 5.3.4～ 定理 5.3.6 还提供了求约束流 (5.31) 的孤波解的一种有效方法. 事实上, 令

$$N^{(k)} = \begin{pmatrix} a_k(\lambda) & b_k(\lambda) \\ c_k(\lambda) & -a_k(\lambda) \end{pmatrix}$$

则由 (5.43) 知:

$$\mu(\lambda) = \pm\sqrt{a_k^2(\lambda) + b_k(\lambda)c_k(\lambda)} \tag{5.53}$$

$$\delta_{1i}(\eta_i) = \frac{\psi_2(\eta_i)}{\psi_1(\eta_i)} = \frac{\mu(\eta_i) - a_k(\eta_i)}{b_k(\eta_i)} \quad (i = 1, 2) \tag{5.54}$$

因此可由已知量 $(q, r, \phi_1, \phi_2)$ 直接求出 $\delta_{1i}(i = 1, 2)$, 再将 (5.54) 代入定理 5.3.4～ 定理 5.3.6 中的 $\psi_{1j}, \psi_{2j}, \tilde{\psi}_{1j}, \tilde{\psi}_{2j}$, 就可由 $(q, r, \phi_1, \phi_2)$ 求出新的孤波解 $(\overline{q}, \overline{r}, \overline{\phi}_1, \overline{\phi}_2)$.

## 5.4 屠格式在 loop 代数 $\tilde{A}_2$ 上的应用

为了扩大屠格式的应用范围, 郭福奎教授考虑了 Lie 代数 $G = A_2$ 情形, 并构造了 loop 代数 $\tilde{A}_2$ 的一个特殊子代数, 再利用屠格式得到了一族既包含非线性 Schrödinger 方程, 又包含 MKdV 方程的一类新的可积 Hamilton 方程族. 本节在 loop 代数 $\tilde{A}_2$ 上构造一个维数低的子代数, 利用屠格式建立对称约束, 求得该方程的两组约束流的 Hamilton 结构.

### 5.4.1 Hamilton 结构

记

$$\widetilde{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e_\pm = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \pm1 & 0 & \pm1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

则换位关系为:

$$[\widetilde{h}, e_\pm] = 3e_\mp, [e_-, e_+] = 2\widetilde{h}$$

于是以$\{\widetilde{h}, e_\pm\}$为基构成 $A_2$ 的一个子代数, 以

$$\widetilde{h}(n) = \lambda^n \widetilde{h}, e_\pm(n) = \lambda^n e_\pm$$

为基构成 loop 代数 $\widetilde{A}_2$ 的一个子代数, 规定其级 (gradation) 为:

$$\deg \widetilde{h}(n) = \deg e_\pm(n) = n$$

考虑其等谱问题:

$$\begin{aligned}
&\phi_x = U\phi, \lambda_t = 0. \phi = (\phi_1, \varphi_2, \phi_3)^T \\
&U = \begin{pmatrix} \lambda & q+r & 0 \\ q-r & -2\lambda & q-r \\ 0 & q+r & \lambda \end{pmatrix} = \widetilde{h}(1) + qe_+(0) + re_-(0)
\end{aligned} \tag{5.55}$$

取

$$V = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \widetilde{h}(-m) + b_m e_+(-m) + c_m e_-(-m))$$

解伴随方程

$$V_x = [U, V] \tag{5.56}$$

得递推关系:

$$\begin{cases}
a_{mx} = -2qc_m + 2rb_m, b_{mx} = 3c_{m+1} - 3ra_m \\
c_{mx} = 3b_{m+1} - 3qa_m, b_0 = c_0 = 0, a_0 = \alpha \neq 0 \\
c_1 = 3\alpha r, b_1 = 3\alpha q, c_2 = \alpha q_x, b_2 = \alpha r_x \\
c_3 = \dfrac{1}{3}(\alpha r_{xx} + 3\alpha r(r^2 - q^2)) \\
b_3 = \dfrac{1}{3}(\alpha q_{xx} + 3\alpha q(r^2 - q^2))
\end{cases} \tag{5.57}$$

记

$$\begin{aligned}
V_+^{(n)} &= (\lambda^n V)_+ \\
&= \sum_{m=0}^{n} (a_m \widetilde{h}(n-m) + b_m e_+(n-m) + c_m e_-(n-m)) \\
V_-^{(n)} &= \lambda^n V - V_+^{(n)}
\end{aligned}$$

则 (5.56) 式可写成为:

$$-V_{+x}^{(n)}+[U,V_{+}^{(n)}]=V_{-x}^{(n)}-[U,V_{-}^{(n)}] \tag{5.58}$$

上式左端所含基元阶数 (deg)$\geq 0$. 右端阶数 $\leq 0$, 于是

$$-V_{+x}^{(n)}+[U,V_{+}^{(n)}]=-3b_{n+1}e_{-}(0)-3c_{n+1}e_{+}(0)$$

取 $V^{(n)}=V_{+}^{(n)}$. 则由零曲率方程

$$U_t-V_x^{(n)}+[U,V^{(n)}]=0 \tag{5.59}$$

确定可积系:

$$u_t=\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t=J\begin{pmatrix} 2b_n \\ -2c_n \end{pmatrix} \tag{5.60}$$

其中

$$J=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\partial+6r\partial^{-1}r) & 3r\partial^{-1}q \\ 3q\partial^{-1}r & \frac{1}{2}(-\partial+6q\partial^{-1}q) \end{pmatrix}$$

为 Hamilton 算子. 由 (5.57) 易知:

$$\begin{pmatrix} 2b_{n+1} \\ -2c_{n+1} \end{pmatrix}=L\begin{pmatrix} 2b_n \\ -2c_n \end{pmatrix}$$

其中

$$L=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(\partial+6r\partial^{-1}r) & -2r\partial^{-1}q \\ 2q\partial^{-1}r & \frac{1}{3}(\partial-6q\partial^{-1}q) \end{pmatrix}$$

于是 (5.60) 可写成:

$$u_t=\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t=JL^{n-1}\begin{pmatrix} 6\alpha q \\ -6\alpha r \end{pmatrix} \tag{5.61}$$

当 $n=2$ 时,(5.61) 约化为广义耦合 Shrödinger 方程

$$\begin{cases} q_t = \alpha r_{xx} + 3\alpha r(r^2 - q^2) \\ r_t = \alpha q_{xx} + 3\alpha q(r^2 - q^2) \end{cases} \tag{5.62}$$

取 $q=r$,(5.62) 约化为著名的热传导方程

$$r_t = \alpha r_{xx} \tag{5.63}$$

为求得 (5.61) 的 Hamilton 结构, 令

$$V = a\widetilde{h}(0) + be_+(0) + ce_-(0)$$

则

$$< V, \frac{\partial U}{\partial q} >= 4b, \quad < V, \frac{\partial U}{\partial r} >= -4c, \quad < V, \frac{\partial U}{\partial \lambda} >= 6a$$

代入迹恒等式得

$$\begin{pmatrix} \delta/\delta q \\ \delta/\delta r \end{pmatrix} (3a) = \lambda^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \lambda^{-\gamma} \begin{pmatrix} 2b \\ -2c \end{pmatrix} \right) \tag{5.64}$$

比较 (5.64) 两端 $\lambda^{n-1}$ 的系数, 得

$$\begin{pmatrix} \delta/\delta q \\ \delta/\delta r \end{pmatrix} (3a_{n+1}) = (\gamma - n) \begin{pmatrix} 2b_n \\ -2c_n \end{pmatrix}$$

取 $n=1$, 知 $\gamma=0$, 于是得到方程族 (5.61) 的广义 Hamilton 结构

$$u_t = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t = J\frac{\delta H_n}{\delta u} \tag{5.65}$$

其中 $H_n = -\dfrac{3a_{n+1}}{n}$. 因为 $JL = L^*J$, 所以 $\{H_n\}$ 中两两对合,(5.65) 是 Liouville 意义下的可积 Hamilton 系统.

### 5.4.2 对称约束流的正则 Hamilton 表示

考虑等谱问题 (5.55) 的共轭等谱问题

$$
\begin{gathered}
\psi_x = U^*\psi, \lambda_t = 0, \psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T \\
U^* = \begin{pmatrix} \lambda & -(q-r) & 0 \\ -(q+r) & 2\lambda & -(q+r) \\ 0 & (q-r) & -\lambda \end{pmatrix}
\end{gathered} \tag{5.66}
$$

直接计算知:

$$
\frac{\delta\lambda}{\delta u} = \begin{pmatrix} \dfrac{\delta\lambda}{\delta q} \\ \dfrac{\delta\lambda}{\delta r} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1 + \varphi_2\psi_3 + \varphi_3\psi_2 \\ -\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1 + \varphi_2\psi_3 \quad \varphi_3\psi_2 \end{pmatrix}
$$

其中 $E$ 为规范常数. 对于 $N$ 个不同的 $\lambda_j$ 和某固定整数 $k(k = 0, 1, 2, \cdots)$, 一般地对称约束可表示为:

$$
J\frac{\delta H_k}{\delta u} = J\beta_k \sum_{j=1}^{N} E_j J \frac{\delta\lambda_j}{\delta u} \tag{5.67}
$$

其中 $\beta_k$ 为某个待定常数.

对于谱系 (5.65), (5.67) 约化为:

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 2b_k \\ -2c_k \end{pmatrix} \\
&= \beta_k \times \begin{pmatrix} <\Phi_1, \psi_2> + <\Phi_2, \psi_1> + <\Phi_2, \psi_3> + <\Phi_3, \psi_2> \\ -<\Phi_1, \psi_2> + <\Phi_2, \psi_1> + <\Phi_2, \psi_3> - <\Phi_3, \psi_2> \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.68}
$$

当 $k = 1$ 时, 取 $\beta_1 = 3\alpha$,(5.68) 约化为:

$$
\begin{cases}
q = \dfrac{1}{2}(<\Phi_1, \psi_2> + <\Phi_2, \psi_1> + <\Phi_2, \psi_3> + <\Phi_3, \psi_2>) \\
r = \dfrac{1}{2}(<\Phi_1, \psi_2> - <\Phi_2, \psi_1> - <\Phi_2, \psi_3> + <\Phi_3, \psi_2>)
\end{cases}
$$

$$(5.69)$$

将 (5.69) 代入 (5.55) 和 (5.66) 得到如下双对称约束流：

$$\begin{pmatrix}\phi_{1j}\\\phi_{2j}\\\phi_{3j}\end{pmatrix}_x = U(u,\lambda_j)|_A\begin{pmatrix}\phi_{1j}\\\phi_{2j}\\\phi_{3j}\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\psi_{1j}\\\psi_{2j}\\\psi_{3j}\end{pmatrix}_x = U^*(u,\lambda_j)|_A\begin{pmatrix}\psi_{1j}\\\psi_{2j}\\\psi_{3j}\end{pmatrix} \quad (5.70)$$

其中下标 $A$ 表示将 (5.69) 代入相应表达式. 令

$$\overline{H} = <\Lambda\Phi_1,\psi_1> + (<\Phi_2,\psi_1> + <\Phi_2,\psi_3>)(<\Phi_1,\psi_2> + <\Phi_3,\psi_2>) - 2<\Lambda\Phi_2,\psi_2> + <\Lambda\Phi_3,\psi_2>$$

则 (5.70) 可化为广义 Hamilton 表示形式：

$$\Phi_{ix} = \frac{\partial\overline{H}}{\partial\Psi_i},\Psi_{ix} = \frac{\partial\overline{H}}{\partial\Phi_i}, \qquad (i=1,2,3) \quad (5.71)$$

这里 $\Phi_i = (\phi_{i1},\cdots,\phi_{iN})^T,\Psi_i = (\psi_{i1},\cdots,\psi_{iN})^T$.

当 $k=3$，取 $\beta_3 = \dfrac{2\alpha}{3}$，由 (5.67) 得到如下隐式高阶对称约束：

$$\begin{cases} q_{xx} + 3q(r^2 - q^2) = -<\Phi_1,\Psi_2> \\ \qquad - <\Phi_2,\Psi_1> - <\Phi_2,\Psi_3> - <\Phi_3,\Psi_2> \\ r_{xx} + 3r(r^2 - q^2) = -<\Phi_1,\Psi_2> \\ \qquad + <\Phi_2,\Psi_1> + <\Phi_2,\Psi_3> - <\Phi_3,\Psi_2> \end{cases} \quad (5.72)$$

将 (5.72) 代入 (5.55) 和 (5.56) 得到如下对称约束流：

$$\begin{pmatrix}\phi_{1j}\\\phi_{2j}\\\phi_{3j}\end{pmatrix}_x = U(u,\lambda_j)|_B\begin{pmatrix}\phi_{1j}\\\phi_{2j}\\\phi_{3j}\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\psi_{1j}\\\psi_{2j}\\\psi_{3j}\end{pmatrix}_x = U^*(u,\lambda_j)|_B\begin{pmatrix}\psi_{1j}\\\psi_{2j}\\\psi_{3j}\end{pmatrix} \quad (5.73)$$

其中下标 $B$ 表示将 (5.72) 代入相应表达式.

引入 Jacobi-Ostrogradsky 坐标:

$$q_1 = q, q_2 = r, p_1 = q_x, p_2 = -r_x$$

记

$$P_i = (\phi_{i1}, \cdots, \phi_{iN}, q_1, q_2)^T, \quad Q_i = (\psi_{i1}, \cdots, \psi_{iN}, p_1, p_2)^T$$

令

$$\begin{aligned}\tilde{H} =& < \Lambda\Phi_1, \Psi_1 > +(q_1 + q_2)(< \Phi_2, \Psi_1 > + < \Phi_2, \Psi_3 >) \\ &+(q_1 - q_2)(< \Phi_1, \Psi_2 > + < \Phi_3, \Psi_2 >) - 2 < \Lambda\Phi_2, \Psi_2 > \\ &+ < \Lambda\Phi_3, \Psi_3 > +\frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 - \frac{3}{4}q_1^4 - \frac{3}{4}q_2^4 + \frac{3}{2}q_1^2 q_2^2\end{aligned}$$

则 (5.73) 可写成广义 Hamilton 形式:

$$P_{ix} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}, Q_{ix} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}, \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{5.74}$$

## 5.5 可积耦合及其求法举例

可积耦合是孤立子理论的一个新的研究方向, 在研究可积系统的无中心 Virasoro 对称代数时, 产生了这一概念. 设

$$u_t = K(u) \tag{5.75}$$

为已知的可积系, 称

$$\begin{cases} u_t = K(u) \\ v_t = S(u, v) \end{cases} \tag{5.76}$$

为 (5.75) 的可积耦合, 如果 (5.76) 仍是可积的, 且 $S(u, v)$ 显含 $u$ 或 $u$ 对 $x$ 的导数. 可积耦合的求法主要有两种:

(1) 原方程加其对称方程;

(2) 摄动方法.

这两种方法的共同特点是: 从原方程 (5.75) 出发, 所得结果是一个方程的可积耦合. 本节提出的方法, 是从等谱问题入手, 通过构造一个恰当的 loop 代数 $\tilde{G}$, 使所得结果为一个方程族的可积耦合.

### 5.5.1 一个 loop 代数

设 G 是以 $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ 为基的线性空间, 规定其换位运算为

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = 2e_2, [e_1, e_3] = -2e_3, [e_1, e_4] = e_4 \\ [e_1, e_5] = -e_5, [e_2, e_3] = e_1, [e_2, e_4] = 0, [e_2, e_5] = e_4 \\ [e_3, e_4] = e_5, [e_3, e_5] = 0, [e_4, e_5] = 0 \end{cases} \tag{5.77}$$

记

$$a = \sum_{i=1}^{5} a_i e_i, b = \sum_{i=1}^{5} b_i e_i, c = \sum_{i=1}^{5} c_i e_i$$

其中 $a_i, b_i, c_i$ 为任意常数 (或函数), 则有

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \tag{5.78}$$

即 Jacobi 恒等式成立, 因此 $G$ 是一个 Lie 代数. 以

$$\begin{cases} e_i(n) = e_i\lambda^n, i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ [e_i(m), e_j(n)] = [e_i, e_j]\lambda^{m+n}, 1 \leq i, j \leq 5 \\ \deg e_i(n) = n, i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \tag{5.79}$$

为基, 构成 loop 代数 $\tilde{G}$. 以 $\{e_1(n), e_2(n), e_3(n)\}$ 为基, 构成 $\tilde{G}$ 的一个子代数 $\tilde{G}_1$, 以 $\{e_4(n), e_5(n)\}$ 为基构成另一个子代数 $\tilde{G}_2$. 易见 $\tilde{G}_1$ 与 $\tilde{G}_2$ 满足下列条件: $\tilde{G}_1$ 同构于 $\tilde{A}_1$, 且

$$[\tilde{G}_1, \tilde{G}_2] \subset G_2 \tag{5.80}$$

这里 $\tilde{A}_1$ 是指本章 5.3 节中的 loop 代数.

由此可建立相应于给定等谱问题

$$\psi_x = U\psi$$

的等谱问题, 使得出的可积方程族为给定方程族的可积耦合.

取线性问题的形式为

$$\begin{cases} \psi_x = [U, \psi], \lambda_t = 0 \\ \psi_t = [V, \psi] \end{cases} \tag{5.81}$$

其中 $\psi = \sum_{i=1}^{5} \psi_i e_i, \psi_i$ 为任意函数.$U = U(u,\lambda) \in \tilde{G}, V = V(u,\lambda) \in \tilde{G}, u = (u_1, \cdots, u_p)^T$ 为函数向量,$\lambda$ 为谱参数.(5.81) 的相容条件为

$$\psi_{xt} = [U_t, \psi] + [U, [V, \psi]] = \psi_{tx} = [V_x, \psi] + [V, [U, \psi]]$$

即

$$[U_t, \psi] + [U, [V, \psi]] - [V_x, \psi] - [V, [U, \psi]] = 0 \tag{5.82}$$

由 Jacobi 恒等式 (5.78),(5.82) 化为

$$[U_t, \psi] - [V_x, \psi] + [[U, V], \psi]] = 0 \tag{5.83}$$

由 $\psi$ 的任意性, 由 (5.83) 得到零曲率方程

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \tag{5.84}$$

## 5.5.2 应用举例

**例 5.5.1** Kaup-Newell(KN) 族的可积耦合

取 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 的一个基为

$$\begin{cases} h(n) = \begin{pmatrix} \lambda^{2n} & 0 \\ 0 & -\lambda^{2n} \end{pmatrix}, e(n) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{2n+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ f(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}, [h(m), e(n)] = 2e(m+n) \\ [h(m), f(n)] = -2f(m+n), [e(m), f(n)] = h(m+n+1) \\ \deg h(n) = 2n, \deg e(n) = \deg f(n) = 2n+1 \end{cases} \tag{5.85}$$

考虑等谱问题

$$\psi_x = U\psi, \lambda_t = 0, U = h(1) + qe(0) + rf(0) \tag{5.86}$$

则利用屠格式导出可积的 Hamilton 方程族

$$u_t = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t = JL^{n-1} \begin{pmatrix} \beta r \\ \beta q \end{pmatrix} = J\frac{\delta H_n}{\delta u} \tag{5.87}$$

其中

$$J=\begin{pmatrix}0 & \partial\\ \partial & 0\end{pmatrix}, L=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\partial-r\partial^{-1}q\partial & -r\partial^{-1}r\partial\\ -q\partial^{-1}q\partial & \partial-q\partial^{-1}r\partial\end{pmatrix}$$

$$H_n=\frac{4a_n+rb_n+qc_n}{-2n+6}$$

取线性等谱问题

$$\psi_x=U\psi, U=e_1(1)+u_1e_2(0)+u_2e_3(0)+u_3e_4(0)+u_4e_5(0) \quad (5.88)$$

设

$$V=\sum_{m=0}^{\infty}(a_me_1(n-m)+b_me_2(n-m)+c_me_3(n-m)$$
$$+d_me_4(n-m)+f_me_5(n-m))$$

解辅助方程

$$V_x=[U,V] \quad (5.89)$$

得递推关系:

$$\begin{cases}a_{mx}=u_1c_{m+1}-u_2b_{m+1}, b_{mx}=2b_{m+1}-2u_1a_m\\ c_{mx}=-2c_{m+1}-2u_1a_m\\ d_{mx}=u_1f_m+d_{m+1}-u_3a_m-u_4b_m\\ f_{mx}=-f_{m+1}+u_2d_m-u_3c_m+u_4a_m\\ a_0=\beta\neq 0, b_0=c_0=d_0=f_0=0, a_1=\dfrac{\beta}{2}u_1u_2\\ b_1=\beta u_1, c_1=\beta u_2, d_1=\beta u_3, f_1=\beta u_4\end{cases} \quad (5.90)$$

记

$$V_+^{(n)}=\sum_{m=0}^{n}(a_me_1(n-m)+b_me_2(n-m)+c_me_3(n-m)$$
$$+d_me_4(n-m)+f_me_5(n-m))$$
$$V_-^{(n)}=\lambda^nV-V_+^{(n)}$$

则 (5.89) 可写成 $-V_{+x}^{(n)}+[U,V_+^{(n)}]=V_{-x}^{(n)}-[U,V_-^{(n)}]$. 上式左端所含基元的阶数 (deg) $\geq 0$, 右端的阶数 $\leq 1$.

于是

$$
\begin{aligned}
&-V_{+x}^{(n)}+[U,V_{+}^{(n)}]\\
=&\ (u_1c_{n+1}-u_2b_{n+1})e_1(0)+2b_{n+1}e_2(0)-2c_{n+1}e_3(0)\\
&+d_{n+1}e_4(0)-f_{n+1}e_5(0)
\end{aligned}
$$

记 $\qquad V^{(n)}=V_{+}^{(n)}+\Delta_n,\Delta_n=a_ne_1(0)$

则由零曲率方程确定可积系:

$$
u_t=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}_t=J\begin{pmatrix}c_n\\b_n\\f_n\\d_n\end{pmatrix} \tag{5.91}
$$

其中

$$
J=\begin{pmatrix}0&-\partial&0&0\\\partial&0&0&0\\0&-u_4&u_1&-\partial\\-u_3&0&-\partial&u_2\end{pmatrix}
$$

由 (5.90) 知:

$$
\begin{pmatrix}c_{n+1}\\b_{n+1}\\f_{n+1}\\d_{n+1}\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}c_n\\b_n\\f_n\\d_n\end{pmatrix}
$$

其中

$$
L=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}(u_2\partial^{-1}u_1\partial+\partial)&-\frac{1}{2}u_2\partial^{-1}u_2\partial&0&0\\-\frac{1}{2}u_1\partial^{-1}u_1\partial&-\frac{1}{2}(u_1\partial^{-1}u_2\partial-\partial)&0&0\\-u_3-\frac{1}{2}u_4\partial^{-1}u_1\partial&-\frac{1}{2}u_4\partial^{-1}u_2\partial&-\partial&u_2\\-\frac{1}{2}u_3\partial^{-1}u_1\partial&u_4-\frac{1}{2}u_3\partial^{-1}u_2\partial&-u_1&0\end{pmatrix}
$$

于是 (5.91) 可写成:

$$u_t=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}_t=JL^{n-1}\begin{pmatrix}\beta u_2\\\beta u_1\\\beta u_4\\\beta u_3\end{pmatrix}\tag{5.92}$$

方程族 (5.92) 是由零曲率方程导出的. 所以可积. 由 $J$ 和 $L$ 的构造与 (5.87) 比较知,(5.92) 是已导出方程族 (5.87) 的可积耦合.

**例 5.5.2** 含三个位势的方程族的可积耦合.

取 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 的一个基为:

$$\begin{cases}h(n)=\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\0 & -\lambda^n\end{pmatrix},e(n)=\begin{pmatrix}0 & \lambda^n\\0 & 0\end{pmatrix},f(n)=\begin{pmatrix}0 & 0\\\lambda^n & 0\end{pmatrix}\\ [h(m),e(n)]=2e(m+n),[h(m),f(n)]=-2f(m+n)\\ [e(m),f(n)]=h(m+n),\deg h(n)=\deg e(n)=\deg f(n)=n\end{cases}$$

考虑等谱问题

$$\begin{cases}\varphi_x=U\varphi,\lambda_t=0,\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{pmatrix}\\ U=\begin{pmatrix}-\lambda+s & q\\r & \lambda-s\end{pmatrix}=-h(1)+sh(0)+qe(0)+rf(0)\end{cases}\tag{5.93}$$

其中 $s,q,r$ 为三个位势函数, 由 (5.93) 得到如下含三个位势的可积方程族

$$\begin{aligned}u_t=\begin{pmatrix}s\\q\\r\end{pmatrix}_t&=\begin{pmatrix}2\partial & 0 & 0\\0 & 4q\partial^{-1}q & -2-4q\partial^{-1}r\\0 & 2-4r\partial^{-1}q & 4r\partial^{-1}r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{n+1}\\c_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}\\&=J\begin{pmatrix}a_{n+1}\\c_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=JL^n\begin{pmatrix}0\\c_1\\b_1\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{5.94}$$

其中辛算子和递推算子分别为：

$$J=\begin{pmatrix}2\partial & 0 & 0\\ 0 & 4q\partial^{-1}q & -2 \quad 4q\partial^{-1}r\\ 0 & 2-4r\partial^{-1}q & 4r\partial^{-1}r\end{pmatrix}$$

$$L=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \partial^{-1}q\partial+2\partial^{-1}qs & \partial^{-1}r\partial-2\partial^{-1}rs\\ 0 & \partial+2s-2r\partial^{-1}q & 2r\partial^{-1}r\\ 0 & -2q\partial^{-1}q & -\partial+2s+2q\partial^{-1}r\end{pmatrix}$$

这里 $\partial=\dfrac{\partial}{\partial x}, \partial^{-1}\partial=\partial\partial^{-1}=1.$

考虑如下的等谱问题：

$$\begin{cases}\psi_x=[U,\psi]\\ U=-e_1(1)+u_1e_1(0)+u_2e_2(0)+u_3e_3(0)+u_4e_4(0)+u_5e_5(0)\end{cases}\tag{5.95}$$

设

$$\begin{aligned}V=\sum_{m=0}^{\infty}&(a_me_1(-m)+b_me_2(-m)+c_me_3(-m)\\&+d_me_4(-m)+f_me_5(-m))\end{aligned}$$

解辅助方程

$$V_x=[U,V]\tag{5.96}$$

得：

$$\begin{cases}a_{mx}=u_2c_m-u_3b_m, b_{mx}=-2b_{m+1}+2u_1b_m-2u_2a_m\\ c_{mx}=2c_{m+1}-2u_1c_m+2u_3a_m\\ d_{mx}=-d_{m+1}+u_2f_m+u_1d_m-u_4a_m-u_5b_m\\ f_{mx}=f_{m+1}+u_3d_m-u_1f_m-u_4c_m+u_5a_m\\ a_0=k\neq 0, b_0=c_0=d_0=f_0=0, a_1=0\\ b_1=-ku_2, c_1=-ku_3, d_1=-ku_4, f_1=-ku_5\end{cases}\tag{5.97}$$

设

$$V_+^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} [a_m e_1(n-m) + b_m e_2(n-m) + c_m e_3(n-m) + d_m e_4(n-m) + f_m e_5(n-m)]$$

$$V_-^{(n)} = \lambda^n V - V_+^{(n)}$$

则 (5.96) 可以写成

$$-V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = V_{-x}^{(n)} - [U, V_-^{(n)}] \tag{5.98}$$

取

$$V^{(n)} = V_+^{(n)} + 2a_{n+1}e_1(0)$$

则

$$\begin{aligned} & -V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] \\ = & -2a_{n+1,x}e_1(0) + (2b_{n+1} - 4u_2 a_{n+1})e_2(0) \\ & +(4u_3 a_{n+1} - 2c_{n+1})e_3(0) + (d_{n+1} - 2u_4 a_{n+1})e_4(0) \\ & +(-f_{n+1} + 2u_5 a_{n+1})e_5(0) \end{aligned} \tag{5.99}$$

由零曲率方程

$$U_t - V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] = 0 \tag{5.100}$$

确定下列系统:

$$u_t = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}_t = J \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ c_{n+1} \\ b_{n+1} \\ f_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} \tag{5.101}$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} 2\partial & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4u_2\partial^{-1}u_2 & -2-4u_2\partial^{-1}u_3 & 0 & 0 \\ 0 & 2-4u_3\partial^{-1}u_2 & 4u_3\partial^{-1}u_3 & 0 & 0 \\ 0 & 2u_4\partial^{-1}u_2 & -2u_4\partial^{-1}u_3 & 0 & -1 \\ 0 & -2u_5\partial^{-1}u_2 & 2u_5\partial^{-1}u_3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

由 (5.97) 易知:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ c_{n+1} \\ b_{n+1} \\ f_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} a_n \\ c_n \\ b_n \\ f_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

其中

$$L = \begin{pmatrix} 0 & A & B & 0 & 0 \\ 0 & C & u_3\partial^{-1}u_3 & 0 & 0 \\ 0 & -u_2\partial^{-1}u_2 & D & 0 & 0 \\ 0 & u_4 - u_5\partial^{-1}u_2 & u_5\partial^{-1}u_3 & \partial + u_1 & u_3 \\ 0 & u_4\partial^{-1}u_2 & -u_5 + u_4\partial^{-1}u_3 & u_2 & -\partial + u_1 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\partial^{-1}u_2\partial + \partial^{-1}u_1u_2, \quad B = \frac{1}{2}\partial^{-1}u_3\partial + \partial^{-1}u_1u_3$$

$$C = \frac{1}{2}\partial + u_1 - u_3\partial^{-1}u_2, \quad D = -\frac{1}{2}\partial + u_1 + u_2\partial^{-1}u_3$$

因此 (5.101) 可写成:

$$u_t = JL^n \begin{pmatrix} 0 \\ ku_3 \\ -ku_2 \\ -ku_5 \\ -ku_4 \end{pmatrix} \tag{5.102}$$

由于 (5.102) 是零曲率方程 (5.100) 导出的, 所以可积, 从而 (5.102) 是 (5.94) 的可积耦合.

**特例** 在 (5.94) 中, 取 $s = qr$ 得到著名的 GJ 谱系:

$$u_t = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t = JL^n \begin{pmatrix} c_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \tag{5.103}$$

其中

$$J=\begin{pmatrix} 4q\partial^{-1}q & -2-4q\partial^{-1}r \\ 2-4r\partial^{-1}q & 4r\partial^{-1}r \end{pmatrix}$$

$$L=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{2}+qr-r\partial^{-1}q & r\partial^{-1}r \\ -q\partial^{-1}q & -\dfrac{\partial}{2}+qr+q\partial^{-1}r \end{pmatrix}$$

容易得出,(5.103) 的可积耦合为:

$$u_t=\begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}_t = J\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ b_{n+1} \\ f_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = JL^n\begin{pmatrix} c_1 \\ b_1 \\ f_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$$

其中

$$J=\begin{pmatrix} 4u_2\partial^{-1}u_2 & -2-4u_2\partial^{-1}u_3 & 0 & 0 \\ 2-4u_3\partial^{-1}u_2 & 4u_3\partial^{-1}u_3 & 0 & 0 \\ 2u_4\partial^{-1}u_2 & -2u_4\partial^{-1}u_3 & 0 & -1 \\ -2u_5\partial^{-1}u_2 & 2u_5\partial^{-1}u_3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L=\begin{pmatrix} A & u_3\partial^{-1}u_3 & 0 & 0 \\ -u_2\partial^{-1}u_2 & -\dfrac{1}{2}\partial+u_2u_3+u_2\partial^{-1}u_3 & 0 & 0 \\ u_4-u_5\partial^{-1}u_2 & u_5\partial^{-1}u_3 & \partial+u_2u_3 & -u_3 \\ -u_4\partial^{-1}u_2 & -u_5+u_4\partial^{-1}u_3 & u_2 & -\partial+u_2u_3 \end{pmatrix}$$

其中 $A=\dfrac{1}{2}\partial+u_2u_3-u_3\partial^{-1}u_2$.

在 (5.93) 中, 取 $s=0$, 我们就得到著名的 AKNS 等谱问题

$$\varphi_x=U\varphi,\ U=-h(1)+qe(0)+rf(0)$$

在 (5.95) 中, 取 $u_1=0$, 则相应地有,

$$v_x=[U,v],\ U=-e_1(1)+u_2e_2(0)+u_3e_3(0)+u_4e_4(0)+u_5e_5(0)$$

由此我们就得到 AKNS 方程族的可积耦合:

$$u_t=\begin{pmatrix}u_2\\u_3\\u_4\\u_5\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix}0&-2&0&0\\2&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{n+1}\\b_{n+1}\\f_{n+1}\\d_{n+1}\end{pmatrix}$$

$$=J_1\begin{pmatrix}c_{n+1}\\b_{n+1}\\f_{n+1}\\d_{n+1}\end{pmatrix}=J_1L_1^n\begin{pmatrix}-ku_3\\-ku_2\\-ku_5\\-ku_4\end{pmatrix}$$

其中

$$L_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\partial+u_3\partial^{-1}u_2 & u_3\partial^{-1}u_3 & 0 & 0\\ u_2\partial^{-1}u_2 & \frac{1}{2}\partial-u_2\partial^{-1}u_3 & 0 & 0\\ -u_4+u_5\partial^{-1}u_2 & u_5\partial^{-1}u_3 & -\partial & u_3\\ u_4\partial^{-1}u_2 & u_5-u_4\partial^{-1}u_3 & -u_2 & \partial\end{pmatrix}$$

在上式中, 令 $n=1, u_2=u_3=u, u_4=u_5=v, k=-4$. 则我们就得到 MKdV 方程的可积耦合.

$$\begin{cases}u_t=u_{xxx}-6u^2u_x\\ v_t=4v_{xxx}+6(u_x+u^2)v_x+(3u_{xx}-6uu_x)v\end{cases}$$

## 5.6 Lax 对变换与可积耦合

有些等谱问题中的矩阵之迹不为零, 为了求这样的谱问题对应的可积耦合, 直接套用前面构造的 loop 代数 $\tilde{G}$ 是比较困难的. 为了解决这个问题, 我们对方程族相应的 Lax 对作一个等价变换, 使变换后的 Lax 对的相容性与变换前的一致.

### 5.6.1 Lax 对变换

考虑等谱问题：

$$\varphi_x = U_1(u,\lambda)\varphi, \lambda_t = 0, u = (q,r)^T, \varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T \tag{5.104}$$

其中 $U_1 = U_1(u,\lambda)$ 是二阶矩阵.

解 (5.104) 的伴随表示方程：

$$V_x = [U_1, V] \equiv U_1 V - VU_1, V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \tag{5.105}$$

得到关于 $a_i, b_i, c_i, i \geq 1$ 的递推关系, 其中

$$a = \sum_{i\geq 0} a_i \lambda^{-i}, b = \sum_{i\geq 0} b_i \lambda^{-i}, c = \sum_{i\geq 0} c_i \lambda^{-i}$$

利用屠格式可得到 Lax 对：

$$\varphi_x = U_1 \varphi, \varphi_{t_n} = V_1^{(n)} \varphi \tag{5.106}$$

(5.106) 的相容性即为零曲率方程：

$$U_{1t} - V_{1x}^{(n)} + [U_1, V_1^{(n)}] = 0 \tag{5.107}$$

利用迹恒等式, 就可得到 Hamilton 方程族：

$$u_{t_n} = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_{t_n} = J\frac{\delta H_n}{\delta u} = JL\frac{\delta H_{n-1}}{\delta u} \tag{5.108}$$

$J, L$ 分别是 Hamilton 算子和递推算子.

考虑下面的等谱问题：

$$\varphi_x = U(u,\lambda)\varphi, U = U_1(u,\lambda) + e(u,\lambda) \tag{5.109}$$

矩阵 $U$ 是齐次秩, 二阶矩阵 $e(u,\lambda)$ 满足

$$[e, V] = 0, [e, V_1^n] = 0 \tag{5.110}$$

设 $f_n = f_n(u,\lambda)$ 和 $U$ 具有相同的阶数, 并且满足

$$[U_1, f_n] = 0, [e, f_n] = 0, e_{t_n} = f_{nx} \tag{5.111}$$

设

$$V^{(n)} = V_1^{(n)} + f_n$$

则有

$$U_{t_n} - V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] = U_{1t_n} - V_{1x}^{(n)} + [U_1, V_1^{(n)}] = 0 \tag{5.112}$$

可见新的 Lax 对

$$\varphi_x = U\varphi, \varphi_{t_n} = V^{(n)}\varphi \tag{5.113}$$

的相容性也导出 (5.108). 事实上, 满足 (5.110)~(5.111) 的 $e = e(u,\lambda)$ 和 $f_n = f_n(u,\lambda)$ 是容易选取的. 比如, 我们可取 $e = g(u,\lambda)E_2, f_n = h_n(u,\lambda)E_2$, 其中 $E_2$ 是单位矩阵. 当把所得方程族化为 Hamilton 形式时, 我们有

$$< V, \frac{\partial U}{\partial \lambda} > = < V, \frac{\partial U_1}{\partial \lambda} >, < V, \frac{\partial U}{\partial u} > = < V, \frac{\partial U_1}{\partial u} > \tag{5.114}$$

于是得到相同的迹恒等式:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta u} < V, \frac{\partial U}{\partial \lambda} > &= \left(\lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial \lambda}\lambda^{\gamma}\right) < V, \frac{\partial U}{\partial u} > \\ \frac{\delta}{\delta u} < V, \frac{\partial U_1}{\partial \lambda} > &= \left(\lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial \lambda}\lambda^{\gamma}\right) < V, \frac{\partial U_1}{\partial u} > \end{aligned} \tag{5.115}$$

因此 (5.104) 和 (5.109) 导出相同的可积 Hamilton 系统, 但是 Lax 对 (5.106) 与 Lax 对 (5.113) 不同.

### 5.6.2 TD 谱系的可积耦合

取 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 的基为:

$$
\begin{cases}
h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
[h_1, e] = -[h_2, e] = e, [h_1, f] = -[h_2, f] = -f \\
[e, f] = h_1 - h_2 \equiv h, h_i(n) = \lambda^n h_i, e(n) = \lambda^n e \\
f(n) = \lambda^n f, \deg h_i(n) = \deg e(n) = \deg f(n) = n, (i = 1, 2)
\end{cases}
$$

考虑 TD 谱问题

$$
\begin{cases}
\varphi_x = U_1 \varphi, \varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T, u = (q, r)^T \\
U_1 = U_1(u, \lambda) = -h(1) + r h_1(0) + q(e(0) + f(0))
\end{cases} \tag{5.116}
$$

设

$$
\begin{cases}
\varphi_x = U_1 \varphi, \varphi_{t_n} = V_1^{(n)} \varphi \\
V_1^{(n)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \lambda^{n-i} + q^{-1}(b_{n+1} + c_{n+1}) & \sum\limits_{i=0}^{n} b_i \lambda^{n-i} \\ \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \lambda^{n-i} & -\sum\limits_{i=0}^{n} a_i \lambda^{n-i} \end{pmatrix}
\end{cases} \tag{5.117}
$$

Lax 对 (5.117) 的相容性导出著名的 TD 方程族

$$
\begin{aligned}
u_{t_n} = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_{t_n} &= J \frac{\delta H_n}{\delta u} = J \begin{pmatrix} b_{n+1} + c_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= J L^{n-1} \begin{pmatrix} b_2 + c_2 \\ a_2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.118}
$$

其中辛算子 $J$ 和递推算子 $L$ 分别是

$$
J = \begin{pmatrix} 0 & q^{-1}\partial \\ \partial q^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} r & \partial q^{-1} \partial - 4q \\ \partial^{-1} q \partial & \partial^{-1} r \partial \end{pmatrix}
$$

设

$$
e = -\frac{r}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, f_n = -\frac{1}{2q}(b_{n+1} + c_{n+1}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

易验证 $e$ 和 $f_n$ 满足 (5.110) 和 (5.111).

取 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 的一个基为:

$$\begin{cases} h(n)=\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\ 0 & -\lambda^n\end{pmatrix}, e(n)=\begin{pmatrix}0 & \lambda^n\\ 0 & 0\end{pmatrix}, f(n)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \lambda^n & 0\end{pmatrix}\\ [h(m),e(n)]=2e(m+n), [h(m),f(n)]=-2f(m+n)\\ [e(m),f(n)]=h(m+n)\end{cases}$$

则 Lax 对

$$\begin{cases} \varphi_x=U\varphi=(U_1+e)\varphi=\begin{pmatrix}-\lambda+\dfrac{r}{2} & q\\ q & \lambda-\dfrac{r}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}\\ =\left(-h(1)+\dfrac{r}{2}h(0)+q(e(0)+f(0))\right)\varphi\\ \varphi_{t_n}=V^{(n)}\varphi=(V_1^{(n)}+f_n)\varphi\\ V^{(n)}=\begin{pmatrix}a & \sum\limits_{i=0}^{n}b_i\lambda^{n-i}\\ \sum\limits_{i=0}^{n}c_i\lambda^{n-i} & a\end{pmatrix}\end{cases} \tag{5.119}$$

其中 $a=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\lambda^{n-i}+\dfrac{1}{2q}(b_{n+1}+c_{n+1})$.(5.119) 的相容性也导出方程族 (5.118). 易见,$\tilde{G}_1$ 同构于 $\tilde{A}_1$,$[\tilde{G}_1,\tilde{G}_2]\subset\tilde{G}_2$ 其中 $\tilde{G}_i$(i=1,2) 与上一节相同.

取等谱问题

$$\begin{cases}\psi_x=[U,\psi], \lambda_t=0\\ U=-e_1(1)+u_1(e_2(0)+e_3(0))+\dfrac{u_2}{2}e_1(0)+u_3e_4(0)+u_4e_5(0).\end{cases} \tag{5.120}$$

解伴随表示方程

$$V_x=[U,V] \tag{5.121}$$

得

$$\begin{cases} a_{mx} = u_1(c_m - b_m), b_{mx} = -2b_{m+1} - 2u_1 a_m + u_2 b_m \\ c_{mx} = 2c_{m+1} + 2u_1 a_m - u_2 c_m \\ d_{m+1} = u_1 f_m + \dfrac{u_2}{2} d_m - u_3 a_m - u_4 b_m - d_{mx} \\ f_{mx} = f_{m+1} + u_1 d_m - \dfrac{u_2}{2} f_m - u_3 c_m + u_4 a_m \\ a_0 = -1, b_0 = c_0 = d_0 = f_0 = 0, a_1 = 0, b_1 = c_1 = u_1 \\ d_1 = u_3, f_1 = \quad u_4 \end{cases} \tag{5.122}$$

设

$$\begin{cases} V_{1+}^{(n)} = \sum\limits_{m=0}^{n} (a_m e_1(n-m) + b_m e_2(n \quad m) + c_m e_3(n-m) \\ \qquad\qquad + d_m e_4(n-m) + f_m e_5(n-m)) \\ V_{1-}^{(n)} = \lambda^n V - V_{1+}^{(n)} \end{cases}$$

则有

$$V_{1+x}^{(n)} + [U, V_{1+}^{(n)}] \quad 2b_{n+1}e_2(0) - 2c_{n+1}e_3(0) + d_{n+1}e_4(0) \quad f_{n+1}e_5(0)$$

按照 (5.119), 取

$$V^{(n)} = V_{1+}^{(n)} + \frac{1}{2u_1}(b_{n+1} + c_{n+1})e_1(0)$$

有

$$\begin{aligned} &-V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] - (b_{n+1} - c_{n+1})(e_2(0) + e_3(0)) \\ &- \left(\frac{1}{2u_1}(b_{n+1} + c_{n+1})\right)_x e_1(0) + \left(d_{n+1} \quad \frac{u_3}{2u_1}(b_{n+1} + c_{n+1})\right) e_4(0) \\ &+ \left(\frac{u_4}{2u_1}(b_{n+1} + c_{n+1}) - f_{n+1}\right) e_5(0) \end{aligned}$$

于是零曲率方程

$$U_t - V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] = 0 \tag{5.123}$$

确定可积系:

$$u_t=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix}c_{n+1}-b_{n+1}\\ \left(\dfrac{1}{u_1}(b_{n+1}+c_{n+1})\right)_x\\ -d_{n+1}+\dfrac{u_3}{2u_1}(b_{n+1}+c_{n+1})\\ f_{n+1}-\dfrac{u_4}{2u_1}(b_{n+1}+c_{n+1})\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}\dfrac{1}{u_1}a_{n+1,x}\\ \left(\dfrac{1}{u_1}(b_{n+1}+c_{n+1})\right)_x\\ -d_{n+1}+\dfrac{u_3}{2u_1}(b_{n+1}+c_{n+1})\\ f_{n+1}-\dfrac{u_4}{2u_1}(b_{n+1}+c_{n+1})\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}b_{n+1}+c_{n+1}\\a_{n+1}\\d_{n+1}\\f_{n+1}\end{pmatrix}\tag{5.124}$$

其中

$$J=\begin{pmatrix}0&u_1^{-1}\partial&0&0\\ \partial u_1^{-1}&0&0&0\\ \dfrac{u_3}{2u_1}&0&-1&0\\ -\dfrac{u_4}{2u_1}&0&0&-1\end{pmatrix}$$

由 (5.122) 知:

$$\begin{pmatrix}b_{n+1}+c_{n+1}\\a_{n+1}\\d_{n+1}\\f_{n+1}\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}b_n+c_n\\a_n\\d_n\\f_n\end{pmatrix}\tag{5.125}$$

其中

$$L=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}u_2&\partial u_1^{-1}\partial-4u_1&0&0\\ \partial^{-1}u_1\partial&\partial^{-1}u_2\partial&0&0\\ -u_4&u_4u_1^{-1}\partial-2u_3&u_2-2\partial&2u_1\\ u_3&u_3u_1^{-1}\partial-2u_4&-2u_1&u_2+2\partial\end{pmatrix}$$

由 (5.125), 方程族 (5.124) 可约化为形式:

$$u_t=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}_t=JL^n\begin{pmatrix}b_1+c_1\\a_1\\d_1\\f_1\end{pmatrix}\tag{5.126}$$

方程族 (5.126) 是由零曲率方程 (5.123) 导出的, 所以可积. 由可积耦合的定义知,(5.126) 是 (5.118) 的可积耦合.

### 5.6.3 广义 AKNS 方程族的可积耦合

考虑等谱问题

$$\varphi_x=U_1(u,\lambda)\varphi=\begin{pmatrix}\beta_1\lambda & q\\ r & \beta_2\lambda\end{pmatrix}\varphi\tag{5.127}$$

其中 $\beta_1,\beta_2$ 为常数, 且 $\beta_1\neq\beta_2$, $u=\begin{pmatrix}q\\r\end{pmatrix}$, $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{pmatrix}$

Lax 对 $\varphi_x=U_1\varphi$, $\varphi_{t_n}=V_1^{(n)}\varphi$ 的相容性导出广义 AKNS 族:

$$u_t=JL\begin{pmatrix}c_n\\b_n\end{pmatrix}\tag{5.128}$$

其中

$$V_1^{(n)}=\sum_{m=0}^{n}V_m\lambda^{n-m},\ V_m=\begin{pmatrix}a_m & b_m\\ c_m & -a_m\end{pmatrix}$$

$$L=\frac{1}{\beta}\begin{pmatrix}-\partial+2r\partial^{-1}q & 2r\partial^{-1}r\\ 2q\partial^{-1}q & \partial-2q\partial^{-1}r\end{pmatrix},\quad \beta=\beta_1-\beta_2$$

取 $e=-\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $f_n=0$. 则 $e,f_n$ 满足 (5.111) 和 (5.112). 于是新的 Lax 对

$$\begin{cases}\psi_x=U(u,\lambda)\psi=\left(\frac{\beta}{2}h(1)+qe(0)+rf(0)\right)\psi\\ \psi_{t_n}=V^{(n)}\psi=V_1^{(n)}\psi,\ V^{(n)}=V_1^{(n)}+f_n\end{cases}$$

的相容性也导出 (5.128).

考虑等谱问题:

$$\begin{cases} \psi_x = [U, \psi], \lambda_t = 0 \\ U = \dfrac{\beta}{2}e_1(1) + u_1e_2(0) + u_2e_3(0) + u_3e_4(0) + u_4e_5(0) \end{cases} \tag{5.129}$$

设

$$\begin{aligned} V = \sum_{m=0}^{n} &(a_me_1(-m) + b_me_2(-m) + c_me_3(-m) \\ &+d_me_4(-m) + f_me_5(-m)) \end{aligned}$$

解辅助方程 $V_x = [U, V]$ 得递推关系:

$$\begin{cases} a_{mx} = u_1c_m - u_2b_m, b_{mx} = \beta b_{m+1} - 2u_1a_m \\ c_{mx} = -\beta c_{m+1} + 2u_2a_m \\ d_{mx} = u_1f_m + \dfrac{\beta}{2}d_{m+1} - u_3a_m - u_4b_m \\ f_{mx} = -\dfrac{\beta}{2}f_{m+1} + u_2d_m - u_3c_m + u_4a_m \\ a_0 = -\alpha, b_0 = c_0 = d_0 = f_0 = 0, a_1 = 0 \\ b_1 = -\dfrac{2\alpha}{\beta}u_1, c_1 = -\dfrac{2\alpha}{\beta}u_2, d_1 = -\dfrac{2\alpha}{\beta}u_3, f_1 = -\dfrac{2\alpha}{\beta}u_4 \end{cases} \tag{5.130}$$

设

$$\begin{aligned} V_+^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} &(a_me_1(n-m) + b_me_2(n-m) + c_me_3(n-m) \\ &+d_me_4(n-m) + f_me_5(n-m)) \\ V_-^{(n)} = \lambda^n &V - V_+^{(n)} \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} -V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = &-\beta b_{n+1}e_2(0) + \beta c_{n+1}e_3(0) \\ &-\frac{\beta}{2}d_{n+1}e_4(0) + \frac{\beta}{2}f_{n+1}e_5(0) \end{aligned} \tag{5.131}$$

于是零曲率方程 (5.123) 确定可积系:

$$u_t=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix}0&-\beta&0&0\\\beta&0&0&0\\0&0&0&\frac{\beta}{2}\\0&0&-\frac{\beta}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{n+1}\\b_{n+1}\\f_{n+1}\\d_{n+1}\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}c_{n+1}\\b_{n+1}\\f_{n+1}\\d_{n+1}\end{pmatrix}$$

即

$$u_t=JL^n\begin{pmatrix}-\dfrac{2\alpha}{\beta}u_2\\-\dfrac{2\alpha}{\beta}u_1\\-\dfrac{2\alpha}{\beta}u_4\\-\dfrac{2\alpha}{\beta}u_3\end{pmatrix}\tag{5.132}$$

于是得到了广义 AKNS 方程族 (5.128) 的可积耦合.

**特例** 在 (5.132) 中, 取 $\beta=-2, n=3$ 得:

$$u_t=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix}-2b_4\\2c_4\\-d_4\\f_4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\alpha}{4}u_{1xxx}-\dfrac{3\alpha}{2}u_1u_{21x}\\\dfrac{\alpha}{4}u_{2xxx}-\dfrac{\alpha}{2}u_2^2u_{1x}-\alpha u_1u_2u_{2x}-\dfrac{\alpha}{2}(u_1u_2u_{2x}-u_2^2u_{1x})\\\alpha u_{3xxx}+\alpha(u_1u_{4x})_x-\dfrac{3\alpha}{4}u_1u_3u_{2x}-\dfrac{3\alpha}{2}u_1u_2u_{3x}\\-\dfrac{3\alpha}{4}u_3u_2u_{1x}+\dfrac{3\alpha}{4}u_{1xx}u_4-\alpha u_1u_{4x}+\dfrac{\alpha}{2}u_{1x}u_{4x}\\\alpha u_{4xxx}+\alpha(u_2u_{3x})_x+\dfrac{\alpha}{2}(u_{2x}u_3)_x-\dfrac{\alpha}{2}(u_1u_2u_4)_x\\-\alpha(u_2u_{3xx}+u_1u_2u_{4x})+\dfrac{\alpha}{4}(u_3u_{2xx}-u_1u_4u_{2x}+u_2u_4u_{1x})\end{pmatrix}\tag{5.133}$$

在 (5.133) 中, 取 $u_1=u, u_2=1, \alpha=4$, 则得到著名的 KdV 方程的可积耦合

$$\begin{cases} u_t=u_{xxx}-6uu_x \\ u_{3t}=4u_{3xxx}-6uu_{3x}-3u_xu_3+3u_{xx}u_4+6u_xu_{4x} \\ u_{4t}=4u_{4xxx}-u_xu_4-2uu_{4x} \end{cases}$$

# 5.7 高维 loop 代数及其应用

本节中, 我们构造了一个不同于前面几节中的新的高维 loop 代数. 得到著名的 Levi,BPT,WKI 方程族的可积耦合.

## 5.7.1 Levi 方程族的可积耦合

设 G 是以 $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$ 为基的线性空间, 规定其换位运算为:

$$\begin{cases} [e_1,e_2]=0, [e_1,e_3]=-[e_2,e_3]=e_3, [e_2,e_4]=-[e_1,e_4]=e_4 \\ [e_1,e_5]=-[e_2,e_5]=\frac{e_5}{2}, [e_1,e_6]=-[e_2,e_6]=-\frac{e_6}{2} \\ [e_3,e_4]=e_1-e_2-e_7, [e_3,e_5]=0, [e_3,e_6]=e_5, [e_4,e_5]=e_6 \\ [e_4,e_6]=0, [e_5,e_6]=0, [e_7,e_3]=2e_3, [e_7,e_4]=-2e_4 \\ [e_7,e_5]=e_5, [e_7,e_6]=-e_6, [e_1,e_7]=[e_2,e_7]=0 \end{cases} \tag{5.134}$$

记

$$a=\sum_{i=1}^{7}a_ie_i,\quad b=\sum_{i=1}^{7}b_ie_i,\quad c=\sum_{i=1}^{7}c_ie_i$$

其中 $a_i,b_i,c_i$ 为任意常数或函数. 则有

$$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0$$

即 Jacobi 恒等式成立, 因此 $G$ 是一个 Lie 代数. 以

$$\begin{cases} e_i(n)=e_i\lambda^n, i=1,2,3,4,5 \\ [e_i(m),e_j(n)]=[e_i,e_j]\lambda^{m+n}, 1\le i,j\le 5 \\ \deg e_i(n)=n, i=1,2,3,4,5 \end{cases}$$

为基，构成 loop 代数 $\tilde{G}$. 以 $\{e_1(n), e_2(n), e_3(n), e_4(n)\}$ 为基，构成 $\tilde{G}$ 的一个子代数 $\tilde{G}_1$，以 $\{e_5(n), e_6(n)\}$ 为基构成另一个子代数 $\tilde{G}_2$.

取 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 的基为

$$\begin{cases} h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ [h_1, e] = -[h_2, e] = e, [h_1, f] = -[h_2, f] = -f \\ [e, f] = h_1 - h_2 \equiv h, h_i(n) = \lambda^n h_i(0), e(n) = \lambda^n e(0) \\ f(n) = \lambda^n f(0), \deg h_i(n) = \deg e(n) = \deg f(n) = n, i = 1, 2 \end{cases}$$

则 $\tilde{G}_1$ 与 $\tilde{G}_2$ 满足下列条件：$\tilde{G}_1$ 同构于 $\tilde{A}_1$，且 $[\tilde{G}_1, \tilde{G}_2] \subset \tilde{G}_2$.

考虑等谱问题

$$\begin{cases} \psi_x = U\psi, \lambda_t = 0, \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \\ U = h_2(1) + (r - q)h_2(0) + qe(0) + rf(0) \end{cases} \tag{5.135}$$

设 $\qquad V = ah(0) + be(0) + cf(0)$

$$a = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \lambda^{-m}, b = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \lambda^{-m}, c = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \lambda^{-m}$$

则由

$$V_x = [U, V]$$

得递推关系：

$$\begin{cases} a_{nx} = qc_n - rb_n \\ b_{nx} = -b_{n+1} + (q - r)b_n - 2qa_n \\ c_{nx} = c_{n+1} + (r - q)c_n + 2ra_n \\ a_0 = \alpha \neq 0, b_0 = c_0 = 0, \cdots \end{cases}$$

由屠格式可确定著名的 Levi 方程族

$$u_t = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix} L^n \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = JL^n \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \tag{5.136}$$

其中

$$L = \begin{pmatrix} \partial - r + \partial^{-1} q\partial & r + \partial^{-1} r\partial \\ -q - \partial^{-1} q\partial & -\partial + q - \partial^{-1} r\partial \end{pmatrix}$$

根据等谱问题 (5.135), 取线性问题的形式为

$$
\begin{aligned}
&\psi_x = U\psi,\ \lambda_t = 0\\
&U = e_2(1) + (u_2 - u_1)e_2(0) + u_1 e_3(0) + u_2 e_4(0) + u_3 e_5(0) + u_4 e_6(0)
\end{aligned}
\tag{5.137}
$$

设

$$
\begin{aligned}
V = \sum_{m=0}^{\infty} (&a_m e_7(-m) + b_m e_3(-m) + c_m e_4(-m)\\
&+ d_m e_5(-m) + f_m e_6(-m))
\end{aligned}
$$

解辅助方程

$$V_x = [U, V]$$

得递推关系:

$$
\begin{cases}
a_{mx} = u_1 c_m - u_2 b_m\\
b_{mx} = -b_{m+1} + (u_1 - u_2) b_m - 2u_1 a_m\\
c_{mx} = c_{m+1} + 2u_2 a_m + (u_2 - u_1) c_m\\
d_{mx} = u_1 f_m - \dfrac{d_{m+1}}{2} - u_3 a_m - u_4 b_m + \dfrac{u_1 - u_2}{2} d_m\\
f_{mx} = \dfrac{f_{m+1}}{2} + u_2 d_m + \dfrac{u_2 - u_1}{2} f_m - u_3 c_m + u_4 a_m\\
a_0 = \alpha \neq 0, b_0 = c_0 = d_0 = f_0 = 0, \cdots
\end{cases}
\tag{5.138}
$$

记

$$
\begin{aligned}
V_+^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} (&a_m e_1(n-m) + b_m e_2(n-m) + c_m e_3(n-m)\\
&+ d_m e_4(n-m) + f_m e_5(n-m))\\
V_-^{(n)} = \lambda^n &V - V_+^{(n)}
\end{aligned}
$$

则

$$-V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = V_{-x}^{(n)} - [U, V_-^{(n)}]$$

上式左端所含基元的阶数 (deg) $\geq 0$, 右端的阶数 $\leq 0$. 于是

$$V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = b_{n+1} e_3(0) - c_{n+1} e_4(0) + \frac{d_{n+1}}{2} e_5(0) - \frac{f_{n+1}}{2} e_6(0)$$

记

$$V^{(n)} = V_+^{(n)} + \Delta_n, \Delta_n = (c_n - b_n + 2a_n)e_2(0)$$

则

$$\begin{aligned}-V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = & -(c_n - b_n + 2a_n)_x + (u_1(c_n - b_n + 2a_n) \\ & + b_{n+1})e_3(0) + (-c_{n+1} - u_2(c_n - b_n + 2a_n))e_4(0) \\ & + \frac{u_3(c_n - b_n + 2a_n) + d_{n+1}}{2}e_5(0) \\ & - \frac{f_{n+1} + u_4(c_n - b_n + 2a_n)}{2}e_6(0)\end{aligned}$$

由零曲率方程

$$U_t - V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] = 0 \tag{5.139}$$

确定可积系

$$u_t = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} -u_1(c_n - b_n + 2a_n) - b_{n+1} \\ c_{n+1} + u_2(c_n - b_n + 2a_n) \\ \frac{1}{2}(-u_3(c_n - b_n + 2a_n) - d_{n+1}) \\ \frac{1}{2}(f_{n+1} + u_4(c_n - b_n + 2a_n)) \end{pmatrix}$$

记

$$\bar{b}_n = b_n - a_n, \bar{c}_n = c_n + a_n$$

则

$$u_t = \begin{pmatrix} \bar{b}_{nx} \\ \bar{c}_{nx} \\ \frac{1}{2}(-d_{n+1} - u_3(\bar{c}_n - \bar{b}_n)) \\ \frac{1}{2}(f_{n+1} + u_4(\bar{c}_n - \bar{b}_n)) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \bar{c}_n \\ \bar{b}_n \\ d_{n+1} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \tag{5.140}$$

其中

$$J=\begin{pmatrix} 0 & \partial & 0 & 0 \\ \partial & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u_3}{2} & \frac{u_3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{u_4}{2} & -\frac{u_4}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

因为

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_n \\ \bar{b}_n \\ d_{n+1} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \bar{c}_{n-1} \\ \bar{b}_{n-1} \\ d_n \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$L=\begin{pmatrix} \partial-u_2+\partial^{-1}u_1\partial & u_2+\partial^{-1}u_2\partial & 0 & 0 \\ -u_1-\partial^{-1}u_1\partial & -\partial+u_1-\partial^{-1}u_2\partial & 0 & 0 \\ 2u_1u_4-2u_3\partial^{-1}u_1\partial & C & A & 2u_1 \\ D & 2u_2u_3-2u_4\partial^{-1}u_2\partial & -2u_2 & B \end{pmatrix}$$

$A=u_1-u_2-2\partial, B=u_1-u_2+2\partial, C=2u_1\partial-2u_1u_2-2u_3\partial^{-1}u_2\partial$
$D=2u_3\partial-2u_3u_2-2u_4\partial^{-1}u_1\partial$
所以 (5.140) 可写成:

$$u_t=JL^n\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ -2\alpha u_3 \\ -2\alpha u_4 \end{pmatrix} \tag{5.141}$$

(5.141) 由零曲率方程 (5.139) 导出, 所以可积. 由可积耦合的定义知,(5.141) 是 Levi 方程族的可积耦合.

## 5.7.2 Boite-Pempinelli-Tu(BPT) 族的可积耦合

前面讨论的方程族, 如 KN 族、TD 族、AKNS 族等有一个共性, 即都是从 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 出发, 利用屠格式得到的, 其中的 loop 代数

$\tilde{A}_1$ 的一个子代数及换位关系是：

$$\begin{cases} h(n)=\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & -\lambda^n \end{pmatrix}, e(n)=\begin{pmatrix} 0 & \lambda^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f(n)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda^n & 0 \end{pmatrix} \\ [h(m),e(n)]=2e(m+n),[h(m),f(n)]=-2f(m+n) \\ [e(m),f(n)]=h(m+n) \end{cases} \tag{5.142}$$

可是 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 的子代数还有以下情形：

$$\begin{cases} \bar{h}(n)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & -\lambda^n \end{pmatrix}, e^+(n)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \lambda^n \\ \lambda^n & 0 \end{pmatrix} \\ e^-(n)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \lambda^n \\ -\lambda^n & 0 \end{pmatrix}, [\bar{h}(m),e^+(n)]=e^-(m+n) \\ [\bar{h}(m),e^-(n)]=e^+(m+n),[e^+(m),e^-(n)]=-\bar{h}(m+n) \\ \deg(\bar{h}(n))=\deg(e^+(n))=\deg(e^-(n))=n \end{cases} \tag{5.143}$$

显然 (5.142) 与 (5.143) 的换位关系是不同的．利用 (5.143) 可导出许多重要的方程族，如 TC 族、BPT 族、TC 族等．因为在求可积耦合时构造的 loop 代数是基于 (5.142) 和 (5.143) 的，所以为了求出 (5.143) 对应的方程族的可积耦合，我们必须再另找一个不同于 loop 代数 (5.79) 的 loop 代数 $\bar{G}$，由此出发，求得 BPT 族的可积耦合．

利用 (5.143)，取等谱问题：

$$\begin{cases} \psi_x=U\psi, \psi=(\psi_1,\psi_2)^T \\ U=2\bar{h}(1)+qe^+(0)+re^-(-1)+sh(-1) \end{cases} \tag{5.144}$$

设

$$V=\sum_{m\geq 0}(a_m h(-m)+b_m e^+(-m)+c_m e^-(-m))$$

则可得：

$$\begin{cases} a_{nx}=-qc_n+rb_{n-1}, b_{nx}=2c_{n+1}+sc_{n-1}-ra_{n-1} \\ c_{nx}=2b_{n+1}+sb_{n-1}-qa_n, a_0=2\beta, b_0=c_0=0 \\ a_{2k+1}=b_{2k}=c_{2k+1}=0 \end{cases}$$

利用屠格式, 可求得 BPT 方程族:

$$u_t = \begin{pmatrix} q \\ r \\ s \end{pmatrix}_t = JL^n \begin{pmatrix} \beta q \\ 0 \\ 2\beta \end{pmatrix} \tag{5.145}$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & \partial & -q \\ 0 & q & -\partial \end{pmatrix}$$

$$L = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \partial^2 - 2s - q^2 + 2q\partial^{-1}r + q\partial^{-1}q_x & 2s - q\partial^{-1}(qs) & \partial r - q\partial^{-1}(qr) \\ -2\partial & -2s & -2r \\ -2q + \partial^{-1}(2q_x + 4r) & -2\partial^{-1}(qs) & -2\partial^{-1}(qr) \end{pmatrix}$$

设 $G$ 是一个线性空间. 它的一个基为 $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, 并定义其换位关系为:

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_2, [e_2, e_3] = -e_1, [e_1, e_4] = \dfrac{1}{2}e_5, \\ [e_1, e_5] = \dfrac{1}{2}e_4, [e_2, e_4] = \dfrac{1}{2}e_4, [e_3, e_4] = \dfrac{1}{2}e_5 \\ [e_2, e_5] = -\dfrac{1}{2}e_5, [e_3, e_5] = -\dfrac{1}{2}e_4, [e_4, e_5] = 0 \end{cases} \tag{5.146}$$

设

$$w = \sum_{i=1}^{5} w_i e_i, u = \sum_{i=1}^{5} u_i e_i, v = \sum_{i=1}^{5} v_i e_i$$

这里 $w_i, u_i, v_i$ 是任意常数或函数, 则有

$$[w, [u, v]] + [u, [v, w]] + [v, [w, u]] = 0$$

即 Jacobi 恒等式成立, 因此 $G$ 是一个 Lie 代数. 若设

$$\begin{cases} e_i(n) = e_i\lambda^n, i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ [e_i(m), e_j(n)] = [e_i, e_j]\lambda^{m+n}, 1 \le i, j \le 5 \\ \deg e_i(n) = n, i = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

则我们就得到了 loop 代数 $\bar{G}$. 设 $\tilde{G}_1,\tilde{G}_2$ 的基分别为

$$\{e_1(n),e_2(n),e_3(n)\},\{e_4(n),e_5(n)\}$$

易见 $\bar{G}_1$ 同构于 $\tilde{A}_1,[\tilde{G}_1,\tilde{G}_2]\subset\tilde{G}_2$.

取线性等谱问题:

$$\begin{cases}\psi_x=[U,\psi],\lambda_t=0\\ \psi_t=[V,\psi]\end{cases}$$

与前面的类似, 我们推出零曲率方程

$$U_t-V_x+[U,V]=0$$

考虑等谱问题:

$$\begin{aligned}\psi_x=[U,\psi],U=2e_1(1)+u_1e_2(0)+u_2e_3(-1)\\ +u_3e_1(-1)+u_4e_4(-1)+u_5e_5(0)\end{aligned}\tag{5.147}$$

设

$$\begin{aligned}V=\sum_{m\geq 0}[a_me_1(-m)+b_me_2(-m)+c_me_3(-m)\\ +d_me_4(-m)+f_me_5(-m)]\end{aligned}$$

解辅助方程

$$V_x=[U,V]$$

得递推关系:

$$\begin{cases}a_{nx}=-u_1c_n+u_2b_{n-1}\\ b_{nx}=2c_{n+1}-u_2a_{n-1}+u_3c_{n-1}\\ c_{nx}=2b_{n+1}-u_1a_n+u_3b_{n-1}\\ d_{nx}=f_{n+1}+\dfrac{u_1}{2}d_n-\dfrac{u_2}{2}f_{n-1}+\dfrac{u_3}{2}f_{n-1}\\ \qquad-\dfrac{u_4}{2}b_{n-1}+\dfrac{u_5}{2}(c_n-a_n)\\ f_{nx}=d_{n+1}-\dfrac{u_1}{2}f_n+\dfrac{u_2}{2}d_{n-1}+\dfrac{u_3}{2}d_{n-1}-\dfrac{u_5}{2}b_n\\ \qquad+\dfrac{u_4}{2}(a_{n-1}+c_{n-1})\\ a_0=2\beta,b_0=c_0=d_0=f_0=0,a_{2k+1}=b_{2k}\\ \qquad=c_{2k+1}=d_{2k+1}=f_{2k}=0\end{cases}\tag{5.148}$$

取 $n=2m+1$,

$$V^{(n)}=(\lambda^nV)_+=\sum_{i=0}^{n}(a_ie_1(n-i)+b_ie_2(n-i)+c_ie_3(n-i)$$
$$+d_ie_4(n-i)+f_ie_5(n-i))$$

则

$$\begin{aligned}V_x^{(n)}+[U,V^{(n)}]=&u_2b_{2m-1}e_1(-1)+u_3b_{2m-1}e_3(-1)-2c_{2m}e_2(0)\\&+\frac{1}{2}(f_{2m-1}(u_3-u_2)-u_4b_{2m-1}+u_5c_{2m})e_4(-1)-d_{2m}e_5(0)\end{aligned}$$

于是零曲率方程

$$U_t-V_x^{(n)}+[U,V^{(n)}]=0 \tag{5.149}$$

确定可积系统

$$u_t=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix}2c_{2m}\\-u_3b_{2m-1}\\-u_2b_{2m-1}\\\frac{1}{2}(u_2-u_3)f_{2m-1}+\frac{u_4}{2}b_{2m-1}-\frac{u_5}{2}c_{2m}\\d_{2m}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&-2&0&0&0\\2&\partial&-u_1&0&0\\0&u_1&-\partial&0&0\\0&0&-\frac{u_5}{2}&1&\frac{u_1}{2}-\partial\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{2m+1}\\-c_{2m}\\a_{2m}\\f_{2m+1}\\d_{2m}\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}b_{2m+1}\\-c_{2m}\\a_{2m}\\f_{2m+1}\\d_{2m}\end{pmatrix} \tag{5.150}$$

由 (5.148) 知:

$$\begin{pmatrix}b_{2m+1}\\-c_{2m}\\a_{2m}\\f_{2m+1}\\d_{2m}\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}b_{2m-1}\\-c_{2m-2}\\a_{2m-2}\\f_{2m-1}\\d_{2m-2}\end{pmatrix}$$

其中

$$L=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} A & H & I & 0 & 0\\ -2\partial & -2u_3 & -2u_2 & 0 & 0\\ G & -2\partial^{-1}u_1u_3 & -2\partial^{-1}u_1u_2 & 0 & 0\\ B & C & D & E & F\\ -\frac{u_5}{2} & -\frac{u_4}{2} & \frac{u_4}{2} & \partial+\frac{u_1}{2} & K \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&A=\partial^2-u_1^2+u_1\partial^{-1}u_{1x}+2u_1\partial^{-1}u_2-2u_3\\
&B=-2\partial u_5+2u_4-u_5\partial+u_5\partial^{-1}u_{1x}+2u_5\partial^{-1}u_4\\
&C=-2\partial u_4+u_1u_4-u_2u_5-4u_5\partial^{-1}u_1u_3\\
&D=2\partial u_4-u_1u_4-u_2u_5-u_1u_2u_5\\
&E=4\partial^2+2\partial u_1-2u_1\partial-u_1^2+2u_2-2u_3\\
&F=-2\partial(u_2+u_3)+u_1u_2+u_1u_3\\
&G=\partial u_3-u_1\partial^{-1}u_1u_3 H=\partial u_3-u_1\partial^{-1}u_1u_3\\
&I=\partial u_2-u_1\partial^{-1}u_1u_2, K=-\frac{u_2+u_3}{2}
\end{aligned}$$

因此 (5.150) 可写成:

$$u_t=JL^m\begin{pmatrix}\beta u_1\\ 0\\ 2\beta\\ \beta u_5\\ 0\end{pmatrix} \tag{5.151}$$

谱系 (5.151) 是由零曲率方程 (5.149) 导出的, 所以可积. 比较 (5.151) 中的 $J, L$ 与 (5.145) 中 $J, L$ 的结构, 我们知道 (5.151) 是 BPT 谱系的可积耦合.

### 5.7.3 WKI 方程族的可积耦合

利用屠格式人们已获得了许多具有重要物理意义的可积 Hamilton 孤子方程族. 我们发现这些孤子族是通过选取不同的等谱问题: $\Psi_x=U\Psi$ 而获得的, 即通过构造不同形式的 $U$ 得到不同的孤子

族，而所选取的零曲率方程 $U_t - V_x + [U,V] = 0$ 中的 $V$ 都是一个格式，即 $V = \Sigma_{m=0}^{\infty} V_m \lambda^{-m}, V_m = \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ c_m & -a_m \end{pmatrix}$. 为了得到 WKI 方程族的扩展可积系统，我们选取的 $V$ 中既含有位势函数，又含有 $a,b$ 或 $c$ 关于 $x$ 的偏导数项，所构造出来的扩展可积系统与其他文献不同.

WKI 方程族是指

$$u_{t_m} = \begin{pmatrix} q \\ q^* \end{pmatrix}_{t_m} = JL^n \begin{pmatrix} c_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \tag{5.152}$$

其中 $q^*$ 为 $q$ 的共轭复函数,$J = \begin{pmatrix} 0 & \partial^2 \\ -\partial^2 & 0 \end{pmatrix}$

$$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2i}\partial + \frac{1}{4i}\varepsilon\frac{q^*}{p}\partial^{-1}\frac{q}{p}\partial^2 & -\frac{1}{4i}\varepsilon\frac{q^*}{p}\partial^{-1}\frac{q^*}{p}\partial^2 \\ \frac{1}{4i}\varepsilon\frac{q}{p}\partial^{-1}\frac{q}{p}\partial^2 & -\frac{1}{2i}\partial - \frac{1}{4i}\varepsilon\frac{q^*}{p}\partial^{-1}\frac{q}{p}\partial^2 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \pm 1, p = \pm\sqrt{1 - \varepsilon q q^*}.$$

构造维数为 5 的 loop 代数 $\tilde{G}$:

$$\begin{cases} e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ [e_1, e_2] = 2e_2, [e_1, e_3] = -2e_3, [e_2, e_3] = e_1, [e_1, e_4] = e_4, [e_1, e_5] \\ = -e_5, [e_2, e_4] = 0, [e_2, e_5] = e_4, [e_3, e_4] = e_5, [e_3, e_5] = 0 \\ [e_4, e_5] = 0, e_k(n) = e_k\lambda^n, \deg(e_k(n)) = n, k = 1,2,3,4,5 \\ [e_i(m), e_j(n)] = [e_i, e_j]\lambda^{m+n}, i,j = 1,2,3,4,5 \end{cases}$$

考虑下列形式的等谱问题

$$\begin{cases}\varphi_x = [U, \varphi], \lambda_t = 0 \\ U = -ie_1(1) + qe_2(1) + \varepsilon q^* e_3(1) + u_3 e_4(0) + u_4 e_5(0)\end{cases} \tag{5.153}$$

设

$$\begin{aligned} V = \Sigma_{m=0}^{\infty} [& a_m e_1(1-m) + b_{mx} e_2(-m) + iqa_m e_2(1-m) \\ & + \varepsilon c_{mx} e_3(-m) + \varepsilon iq^* a_m e_3(1-m) + d_m e_4(-m) + f_m e_5(-m)] \end{aligned}$$

令 $u_1 = q, u_2 = q^*$, 解伴随表示方程

$$V_x = [U, V] \tag{5.154}$$

得递推关系

$$\begin{cases} a_{mx} = \varepsilon(u_1 c_{mx} - u_2 b_{mx}) \\ b_{mxx} + i(u_1 a_{m+1})_x = -2ib_{m+1x} \\ c_{mxx} + i(u_2 a_{m+1})_x = 2ic_{m+1x} \\ d_{mx} + id_{m+1} = u_1 f_{m+1} - u_3 a_{m+1} - u_4 b_{mx} - iu_1 u_4 a_{m+1} \\ f_{mx} = if_{m+1} + \varepsilon u_2 d_{m+1} - \varepsilon u_3 c_{mx} - \varepsilon iu_2 u_3 a_{m+1} + u_4 a_{m+1} \end{cases} \tag{5.155}$$

选取初值 $a_0, b_0, c_0, d_0, f_0$ 使得

$$\begin{cases} 2b_{0x} + (u_1 a_0)_x = 0 \\ 2c_{0x} - (u_2 a_0)_x = 0 \\ a_{0x} = \varepsilon(u_1 c_{0x} - u_2 b_{0x}) \\ id_0 - u_1 f_0 - u_3 a_0 - iu_1 u_4 a_0 \\ if_0 + \varepsilon u_2 d_0 - i\varepsilon u_2 u_3 a_0 + u_4 a_0 = 0 \end{cases}$$

于是

$$a_0 = \frac{-2i}{p'}, b_0 = \frac{2iu_1}{p'}, c_0 = \frac{-2iu_2}{p'}, f_0 = \frac{2u_4 - 2\varepsilon u_1 u_2 u_4}{p'^3}$$

$$d_0 = \frac{2u_3 + 2\varepsilon u_1 u_2 u_3}{p'^3}$$

这里 $p' = \sqrt{1 - \varepsilon u_1 u_2}$. 取

$$\begin{aligned}V_+^{(n)} = \textstyle\sum_{m=0}^n[&a_m e_1(n+2-m) + b_{mx}e_2(n+1-m)\\ &+iu_1a_me_2(2+n-m) + \varepsilon c_{mx}e_3(n+1-m)\\ &+\varepsilon iu_2a_me_3(n+2-m) + d_me_4(n+1-m)\\ &+f_me_5(n+1-m)]\end{aligned}$$

则 (5.154) 式可写成

$$-V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = V_{-x}^{(n)} - [U, V_-^{(n)}] \tag{5.156}$$

易见左端基元阶数 $\geq 1$, 右端基元阶数 $\leq 2$, 所以

$$\begin{aligned}-V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] &= [i(u_1a_{n+1})_x + 2ib_{n+1x}]e_2(1) + [\varepsilon i(u_2a_{n+1})_x\\ &-2i\varepsilon c_{n+1x}]e_3(1) + [id_{n+1} - u_1f_{n+1} + u_3a_{n+1} + iu_1u_2a_{n+1}]e_4(1)\\ &+[-if_{n+1} - \varepsilon u_2d_{n+1} + \varepsilon iu_2u_3a_{n+1} - u_4a_{n+1}]e_5(1)\\ &= -b_{nxx}e_2(1) - \varepsilon c_{nxx}e_3(1) + (-d_{nx} - u_4b_{nx})e_4(1)\\ &+(-\varepsilon u_3c_{nx} - f_{nx})e_5(1)\end{aligned}$$

取

$$V^{(n)} = V_+^{(n)} + \triangle_n, \Delta_n = k_1e_4(0) + k_2e_5(0)$$

则

$$\begin{aligned}-V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] &= -b_{nxx}e_2(1) - \varepsilon c_{nxx}e_3(1) + (-d_{nx} - u_4b_{nx})e_4(1)\\ &+(-f_{nx} - \varepsilon u_2c_{nx})e_5(1) - k_{1x}e_4(0) - k_{2x}e_5(0) + (ik_1 + u_1k_2)e_4(1)\\ &+(-ik_2 + \varepsilon u_2k_1)e_5(1)\end{aligned}$$

令

$$\begin{cases}ik_1 + u_1k_2 = d_{nx} + u_4b_{nx}\\ -ik_2 + \varepsilon u_2k_1 = \varepsilon u_2c_{nx} + f_{nx}\end{cases}$$

为计算方便, 取 $\varepsilon = 1$, 则得

$$\begin{cases}k_1 = -\dfrac{u_1u_2c_{nx} + u_1f_{nx} + id_{nx} + iu_4b_{nx}}{p'}\\[2ex] k_2 = \dfrac{iu_2c_{nx} - u_2d_{nx} + if_{nx} - u_2u_4b_{nx}}{p'}\end{cases} \tag{5.157}$$

于是由零曲率方程

$$U_t - V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] = 0$$

确定可积系

$$\begin{aligned} u_t = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}_t &= \begin{pmatrix} b_{nxx} \\ c_{nxx} \\ k_{1x} \\ k_{2x} \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} 0 & \partial^2 & 0 & 0 \\ -\partial^2 & 0 & 0 & 0 \\ -A_1 & B_1 & D_1 & C_1 \\ -A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_n \\ b_n \\ d_n \\ f_n \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} -c_n \\ b_n \\ d_n \\ f_n \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.158}$$

其中

$$\begin{cases} A_1 = -\dfrac{1}{p'}[(u_1u_2)_x\partial + u_1u_2\partial^2] + \dfrac{p'_x}{p'^2}u_1u_2 \\ A_2 = \dfrac{i}{p'}(u_{2x}\partial + u_2\partial^2) - \dfrac{ip'_x}{p'^2}u_2\partial \\ B_1 = -\dfrac{i}{p'}(u_{4x}\partial + u_4\partial^2] + \dfrac{ip'_x}{p'^2}u_4\partial \\ B_2 = -\dfrac{1}{p'}[(u_2u_4)_x\partial + u_2u_4\partial^2)] + \dfrac{p'_x}{p'^2}u_2u_4\partial \\ C_1 = -\dfrac{1}{p'}(u_{1x}\partial + u_1\partial^2) + \dfrac{p'_x}{p'^2}u_1\partial \\ C_2 = -\dfrac{1}{p'}(u_{2x}\partial + u_2\partial^2) + \dfrac{p'_x}{p'^2}u_2\partial \\ D_1 = -\dfrac{i}{p'}\partial^2 + \dfrac{ip'_x}{p'^2}\partial, D_2 = \dfrac{i}{p'}\partial^2 - \dfrac{ip'_x}{p'^2}\partial \end{cases}$$

根据 (5.155) 式得递推算子

$$L=\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & 0 & 0 \\ Q_1 & Q_2 & 0 & 0 \\ -M_1 & M_2 & \dfrac{i\partial}{p'} & \dfrac{1}{p'}u_1\partial \\ -N_1 & N_2 & -\dfrac{1}{p'}u_2\partial & -i\partial-\dfrac{i}{p'}u_1u_2\partial \end{pmatrix}$$

其中

$$P_1=\frac{1}{2i}\partial+\frac{1}{4i}\frac{u_2}{p'}\partial^{-1}\frac{u_1}{p'}\partial^2,\ P_2=-\frac{1}{4i}\frac{u_2}{p'}\partial^{-1}\frac{u_2}{p}\partial^2$$

$$M_1=-\frac{1}{p'}u_1u_3\partial+\frac{1}{p'}(u_3-u_1u_2u_3)\left(\partial^{-1}\frac{1}{p'}u_1\partial^2+\frac{1}{p'}\partial^{-1}u_1\partial^2\right)$$

$$M_2=\frac{i}{p'}u_4\partial+\frac{1}{p'}(u_3-u_1u_2u_3)\left(\partial^{-1}\frac{1}{p'}u_1+\frac{1}{p'}\partial^{-1}\right)\partial^2$$

$$N_1=-iu_3\partial+iu_2M_1+(u_4-iu_2u_3)\left(\partial^{-1}\frac{1}{p'}+\frac{1}{p'}\partial^{-1}\right)u_1\partial^2$$

$$N_2=iu_2M_2+(u_4-iu_2u_3)\left(\partial^{-1}\frac{1}{p'}+\frac{1}{p'}\partial^{-1}\right)u_2\partial^2$$

$$Q_1=\frac{1}{4i}\frac{u_1}{p'}\partial^{-1}\frac{u_1}{p}\partial^2,\ Q_2=-\frac{1}{2i}\partial-\frac{1}{4i}\frac{u_1}{p'}\partial^{-1}\frac{u_2}{p'}\partial^2$$

因此 (5.158) 式可写成

$$u_t=KL^n\begin{pmatrix} -c_0 \\ b_0 \\ d_0 \\ f_0 \end{pmatrix} \tag{5.159}$$

当 $u_3=u_4=0, u_1=q, u_2=q^*, p'=p$ 时, 可积系统 (5.158) 约化为著名为 WKI 方程族 (5.152). 比较 (5.158) 和 (5.152) 式中 $K$ 和 $L$ 的结构, 再根据可积耦合的定义知, 可积系统 (5.158) 是 WKI 方程族 (5.152) 的可积耦合系统. 它是 (5.152) 的一类扩展 Lax 可积模型.

## 5.8 多分量可积族及其可积耦合

前面研究的可积方程族都是单变元的. 事实上, 还有很多具有物理意义的多分量的可积方程族. 下面通过构造高阶 loop 代数来研究多分量可积族及其可积耦合.

首先引入下列记号.

设向量

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_M)^T,\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_M)^T$$

定义

$$\alpha*\beta=\beta*\alpha=(\alpha_1\beta_1,\cdots,\alpha_M\beta_M)^T$$

利用此定义, 构造 Lie 代数

$$G_M=\{a=(a_{ij})_{M\times 3}=(a_1,a_2,a_3)\} \tag{5.160}$$

其换位运算为

$$[a,b]=(a_2*b_3-a_3*b_2,2(a_1*b_2-a_2*b_1),2(a_3*b_1-a_1*b_3))$$
$$\forall a,b\in G_M \tag{5.161}$$

因此可以得到 loop 代数

$$\tilde{G}_M=\{a\lambda^m,a\in G_M,m=0,\pm1,\pm2,\cdots\} \tag{5.162}$$

$$[a\lambda^m,b\lambda^n]-[a,b]\lambda^{m+n},\forall a,b\in G_M \tag{5.163}$$

但是利用 loop 代数 $\tilde{G}_M$ 不易直接得到多分量可积方程族. 我们构造另外一个 Lie 代数.

**定义 5.8.1** 令 $I_M=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}_{M\times 1}$ 是一列矩阵, 并设

$$h=(I_M,0,0),e=(0,I_M,0),f=(0,0,I_M) \tag{5.164}$$

其中 $M$ 是自然数, 定义其换位运算为

$$\begin{aligned}&[h,e]=-[e,h]=2e,[h,f]=-[f,h]=-2f\\&[e,f]=-[f,e]=h\end{aligned} \tag{5.165}$$

那么 $\{h, e, f\}$ 与 (5.165) 构成 Lie 代数, 记作 $G_M$.

**定义 5.8.2** 如果 $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_M \end{pmatrix}$ 是一列向量 $A = (0, \cdots, 0, I_M, 0, \cdots, 0)_{M \times N}$ 是一 $M \times N$ 矩阵, 其中 $I_M$ 是矩阵 $A$ 的第 $i$ 列. 定义

$$\alpha \cdot A = A \cdot \alpha = (0, \cdots, \alpha * I_M, 0, \cdots, 0) \tag{5.166}$$

令

$\alpha = a_1 \cdot h + a_2 \cdot e + a_3 \cdot f, b = b_1 \cdot h + b_2 \cdot e + b_3 \cdot f$

有

$$\begin{aligned}[a, b] &= (a_2 * b_3 - a_3 * b_2) \cdot h + 2(a_1 * b_2 - a_2 * b_1) \cdot e \\ &\quad + 2(a_3 * b_1 - a_1 * b_3) \cdot f \\ &= (a_2 * b_3 - a_3 * b_2, 2(a_1 * b_2 - a_2 * b_1), \\ &\quad 2(a_3 * b_1 - a_1 * b_3))\end{aligned} \tag{5.167}$$

这恰好是式 (5.161), 其中

$$a_i = (a_{m1}^{(i)}, a_{m2}^{(i)}, \cdots, a_{mM}^{(i)})^T, b_i = (b_{m1}^{(i)}, b_{m2}^{(i)}, \cdots, b_{mM}^{(i)})^T, i = 1, 2, 3$$

利用 Lie 代数 (5.165), 构造 loop 代数 $\tilde{\tilde{G}}_M$

$$\begin{cases} h(i, n) = h \otimes \lambda^{2n+i} \equiv h\lambda^{2n+i}, e(i, n) = e\lambda^{2n+i} \\ f(i, n) = f\lambda^{2n+i} \end{cases}$$

$$\begin{cases}[h(i,m),e(j,n)]=\begin{cases}2e(i+j,m+n),i+j<2\\2e(0,m+n+1),i+j=2\end{cases}\\[h(i,m),f(j,n)]=\begin{cases}-2f(i+j,m+n),i+j<2\\-2f(0,m+n+1),i+j=2\end{cases}\\[e(i,m),f(j,n)]=\begin{cases}h(i+j,m+n),i+j<2\\h(0,m+n+1),i+j=2\end{cases}\\\deg(h(i,n))=\deg(e(i,n))=\deg(f(i,n))=2n+i\\i=0,1;j=0,1\end{cases} \tag{5.168}$$

### 5.8.1 多分量可积方程族

下面利用 loop 代数 $\tilde{\tilde{G}}_M$ 得到多分量可积方程族.

考虑等谱问题

$$U=(\lambda I_M+\frac{u_5*I_M}{\lambda},u_1*I_M+\frac{u_3*I_M}{\lambda},u_2*I_M+\frac{u_4*I_M}{\lambda})$$
$$\varphi_x=[U,\varphi],\lambda_t=0 \tag{5.169}$$

其中 $u_i=(u_1^{(i)},u_2^{(i)},\cdots,u_M^{(i)})^T,i=1,2,3,4,5$

令

$V=\sum\limits_{m\geq 0}(a(0,m)\cdot h(0,-m)+a(1,m)\cdot h(1,-m)+b(0,m)\cdot e(0,-m)+b(1,m)\cdot e(1,-m)+c(0,m)\cdot f(0,-m)+c(1,m)\cdot f(1,-m))$

这里

$$a(0,m)=(a_{m1}^{(0)},a_{m2}^{(0)},\cdots,a_{mM}^{(0)})^T,a(1,m)=(a_{m1}^{(1)},a_{m2}^{(1)},\cdots,a_{mM}^{(1)})^T$$

...

解零曲率方程

$$V_x=[U,V] \tag{5.170}$$

得到

$$\begin{cases} a_x(0,m) = u_1 * c(0,m) - u_2 * b(0,m) + u_3 * c(1,m) \\ \qquad\qquad -u_4 * b(1,m), \\ a_x(1,m+1) = u_1 * c(1,m+1) - u_2 * b(1,m+1) \\ \qquad\qquad\qquad +u_3 * c(0,m) - u_4 * b(0,m), \\ b_x(0,m) = 2b(1,m+1) - 2u_1 * a(0,m) - 2u_3 * a(1,m) \\ \qquad\qquad +2u_5 * b(1,m) \\ b_x(1,m+1) = 2b(0,m+1) - 2u_1 * a(1,m+1) - 2u_3 * a(0,m) \\ \qquad\qquad\qquad +2u_5 * b(0,m), \\ c_x(0,m) = -2c(1,m+1) + 2u_2 * a(0,m) + 2u_4 * a(1,m) \\ \qquad\qquad -2u_5 * c(1,m), \\ c_x(1,m+1) = -2c(0,m+1) + 2u_2 * a(1,m+1) + 2u_4 * a(0,m) \\ \qquad\qquad\qquad -2u_5 * c(0,m) \\ a(0,0) = \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_M)^T, \\ c(0,0) = b(0,0) = a(1,0) = b(1,0) = c(1,0) = 0, \\ b(1,1) = \alpha * u_1, c(1,1) = \alpha * u_2 \\ a(1,1) = 0, \\ c(0,1) = -\frac{\alpha}{2} * u_{2x} + \alpha * u_4 \\ b(0,1) = \frac{\alpha}{2} * u_{1x} + \alpha * u_3, \\ a(0,1) = -\frac{\alpha}{2} * u_1 * u_2 \end{cases}$$

其中 $\alpha_i$ 是常数,$i = 1, 2, \cdots, M$. 注意到

$$\begin{aligned} V_+^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} (&a(0,m) \cdot h(0,n-m) + a(1,m) \cdot h(1,n-m) \\ &+b(0,m) \cdot e(0,n-m) + b(1,m) \cdot e(1,n-m) \\ &+c(0,m) \cdot f(0,n-m) + c(1,m) \cdot f(1,n-m)) \\ V_-^{(n)} = \lambda^{2n} V &- V_+^{(n)} \end{aligned}$$

方程 (5.170) 可写成

$$V_{+x}^{(n)} + [U, V_{+}^{(n)}] = V_{-x}^{(n)} - [U, V_{-}^{(n)}]$$

通过直接计算有

$$\begin{aligned}
&-V_{+x}^{(n)} + [U, V_{+}^{(n)}] = \Big(\frac{a_x(1, n+1) - u_1 * c(1, n+1) + u_2 * b(1, n+1)}{\lambda} \\
&-2b(1, n+1) + \frac{b_x(1, n+1) - 2b(0, n+1) + 2u_1 * a(1, n+1)}{\lambda}, \\
&2c(1, n+1) + \frac{c_x(1, n+1) + 2c(0, n+1) - 2u_2 * a(1, n+1)}{\lambda}\Big) \\
&= -2b(1, n+1) \cdot e(0,0) + 2c(1, n+1) \cdot f(0,0) \\
&+[b_x(1, n+1) - 2b(0, n+1) + 2u_1 * a(1, n+1)] \cdot e(1, -1) \\
&+[c_x(1, n+1) + 2c(0, n+1) - 2u_2 * a(1, n+1)] \cdot f(1, -1) \\
&+[a_x(1, n+1) - u_1 * c(1, n+1) + u_2 * b(1, n+1)] \cdot h(1, -1)
\end{aligned}$$

由零曲率方程

$$U_t - V_{+x}^{(n)} + [U, V_{+}^{(n)}] = 0$$

可以得出下列 Lax 可积方程族

$$u_t = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 2b(1, n+1) \\ -2c(1, n+1) \\ -b_x(1, n+1) + 2b(0, n+1) - 2u_1 * a(1, n+1) \\ -c_x(1, n+1) - 2c(0, n+1) + 2u_2 * a(1, n+1) \\ -a_x(1, n+1) + u_1 * c(1, n+1) - u_2 * b(1, n+1) \end{pmatrix}$$

$$= J_1 \begin{pmatrix} c(0, n+1) \\ b(0, n+1) \\ c(1, n+1) \\ b(1, n+1) \\ -\frac{1}{2}a(1, n+1) \end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} b_x(0,n) + 2u_1 * a(0,n) + 2u_3 * a(1,n) - 2u_5 * b(1,n) \\ c_x(0,n) - 2u_2 * a(0,n) - 2u_4 * a(1,n) + 2u_5 * c(1,n) \\ 2u_3 * a(0,n) - 2u_5 * b(0,n) \\ -2u_4 * a(0,n) + 2u_5 * c(0,n) \\ -u_3 * c(0,n) + u_4 * b(0,n) \end{pmatrix}
$$

$$
= J_2 \begin{pmatrix} c(0,n) \\ b(0,n) \\ c(1,n) \\ b(1,n) \\ \frac{1}{2}a(1,n) \end{pmatrix}
$$

其中

$$
J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2I_M* & 0 \\ 0 & 0 & -2I_M* & 0 & 0 \\ 0 & 2I_M* & 0 & -\partial & -u_1* \\ -2I_M* & 0 & -\partial & 0 & u_2* \\ 0 & 0 & u_1* & -u_2* & -\frac{\partial}{2} \end{pmatrix}, J_2 = (A \vdots B)
$$

$$
A = \begin{pmatrix} 2u_1 * \partial^{-1} u_1* & \partial - 2u_1 * \partial^{-1} u_2* \\ \partial - 2u_2 * \partial^{-1} u_1* & 2u_2 * \partial^{-1} u_2* \\ 2u_3 * \partial^{-1} u_1* & -2u_5 * -2u_3 * \partial^{-1} u_2* \\ 2u_5 * -2u_4 * \partial^{-1} u_1* & 2u_4 * \partial^{-1} u_2* \\ -u_3* & u_4* \end{pmatrix}
$$

$$
B = \begin{pmatrix} 2u_1 * \partial^{-1} u_3* & -2u_5 * -2u_1 * \partial^{-1} u_4* & u_3* \\ 2u_5 * -2u_2 * \partial^{-1} u_3* & 2u_2 * \partial^{-1} u_4* & -u_4* \\ 2u_3 * \partial^{-1} u_3* & -2u_3 * \partial^{-1} u_4* & 0 \\ -2u_4 * \partial^{-1} u_3* & 2u_4 * \partial^{-1} u_4* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$J_1, J_2$ 都是 Hamiltonian 算子.

$L = (l_{ij})_{5\times 5}$, 其中

$$l_{11} = \frac{1}{4}\partial^2 - \frac{1}{2}u_2 * \partial^{-1}u_1 * \partial + u_2 * \partial^{-1}u_3 * - u_5 * + (u_4 * - \frac{1}{2}\partial u_2 *)\partial^{-1}u_1 *,$$

$$l_{12} = -\frac{1}{2}u_2 * \partial^{-1}u_2 * \partial - u_2 * \partial^{-1}u_4 * + (\frac{1}{2}\partial u_2 - u_4 *)\partial^{-1}u_4 *,$$

$$l_{13} = \frac{\partial}{2}u_5 * - u_2 * \partial^{-1}u_1 * u_5 * + (u_4 * - \frac{\partial}{2}u_2 *)\partial^{-1}u_3 *,$$

$$l_{14} = u_2 * \partial^{-1}u_2 * u_5 * + (\frac{\partial}{2}u_2 * - u_4 *)\partial^{-1}u_4 *$$

$$l_{15} = -\partial u_4 * + 2u_2 * \partial^{-1}(u_1 * u_4 * - u_2 * u_3 *)$$

$$l_{21} = -\frac{1}{2}u_1 * \partial^{-1}u_1 * \partial + u_1 * \partial^{-1}u_3 * + (\frac{1}{2}u_{1x} * + u_3 * + u_1 * \partial)\partial^{-1}u_1 *,$$

$$l_{22} = \frac{\partial^2}{4} - \frac{1}{2}u_1 * \partial^{-1}u_2 * \partial - u_1 * \partial^{-1}u_4 * - u_5 * - (\frac{1}{2}u_{1x} * + u_3 * + u_1 * \partial)\partial^{-1}u_2 *$$

$$l_{23} = -u_1 * \partial^{-1}u_1 * u_5 * + (\frac{1}{2}u_{1x} * + u_3 * + u_1 * \partial)\partial^{-1}u_3 *$$

$$l_{24} = -\frac{1}{2}\partial u_5 * + u_1 * \partial^{-1}u_2 * u_5 * - (\frac{1}{2}u_{1x} * + u_3 * + u_1 * \partial)\partial^{-1}u_4 *$$

$$l_{25} = \partial u_3 * + 2u_1 * \partial^{-1}(u_1 * u_4 * - u_2 * u_3 *)$$

$$l_{31} = -\frac{\partial}{2} + u_2 * \partial^{-1}u_1 *, l_{32} = -u_2 * \partial^{-1}u_2 *$$

$$l_{33} = -u_5 * + u_2 * \partial^{-1}u_3 *, l_{34} = -u_2 * \partial^{-1}u_4 *, l_{35} = 2u_4 *$$

$$l_{41} = -u_1 * \partial^{-1}u_1 *, l_{42} = \frac{\partial}{2} - u_1 * \partial^{-1}u_2 *, l_{43} = u_1 * \partial^{-1}u_3 *$$

$$l_{44} = -u_5 * - u_1 * \partial^{-1}u_4 *, l_{45} = 2u_3 *, l_{51} = \partial^{-1}(\frac{1}{2}u_3 * - \frac{1}{4}u_4 * \partial)$$

$$l_{52} = -\partial^{-1}(-\frac{1}{2}u_4 * + \frac{1}{4}u_2 * \partial), l_{53} = -\frac{1}{2}\partial^{-1}u_1 * u_5 *$$

$$l_{54} = -\frac{1}{2}\partial^{-1}u_2 * u_5 *, l_{55} = \partial^{-1}(u_1 * u_4 * - u_2 * u_3 *)$$

$L$ 满足

$$\begin{pmatrix} c(0,n+1) \\ b(0,n+1) \\ c(1,n+1) \\ b(1,n+1) \\ \frac{1}{2}a(1,n+1) \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} c(0,n) \\ b(0,n) \\ c(1,n) \\ b(1,n) \\ \frac{1}{2}a(1,n) \end{pmatrix}$$

因此方程族 (5.171) 可以写成

$$\begin{aligned} u_t = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}_t &= J_1 L \begin{pmatrix} c(0,n) \\ b(0,n) \\ c(1,n) \\ b(1,n) \\ \frac{1}{2}a(1,n) \end{pmatrix} = J_2 \begin{pmatrix} c(0,n) \\ b(0,n) \\ c(1,n) \\ b(1,n) \\ \frac{1}{2}a(1,n) \end{pmatrix} \\ &= J_1 L^n \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} * u_{2x} + \alpha * u_4 \\ \frac{\alpha}{2} * u_{1x} + \alpha * u_3 \\ \alpha * u_2 \\ \alpha * u_1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.172}$$

当 $M > 1$, 方程族 (5.172) 是多分量可积系统. 如果取 $u_3 = u_4 = u_5 = 0$, 可以得到非线性多分量 Schrödinger 方程族的可积耦合

$$\begin{cases} u_{1t} = \frac{\alpha}{2} * u_{1xx} - \alpha * u_1 * u_1 * u_2 \\ u_{2t} = -\frac{\alpha}{2} * u_{2xx} + \alpha * u_1 * u_2 * u_2 \end{cases}$$

### 5.8.2 双多分量可积耦合系统

为了得到方程族 (5.172) 的双多分量可积耦合系统, 我们将 Lie

代数 (5.164) 扩展成如下 loop 代数:

$$\begin{cases} e_1 = (I_M, 0, 0, 0, 0), e_2 = (0, I_M, 0, 0, 0) e_3 = (0, 0, I_M, 0, 0) \\ e_4 = (0, 0, 0, I_M, 0), e_5 = (0, 0, 0, 0, I_M), [e_1, e_2] = 2e_2 \\ [e_1, e_3] = -2e_3, [e_2, e_3] = e_1, [e_1, e_4] = e_4, [e_1, e_5] = -e_5 \\ [e_2, e_4] = 0, [e_3, e_4] = e_5, [e_2, e_5] = e_4, [e_3, e_5] = 0, [e_4, e_5] = 0 \end{cases} \tag{5.173}$$

设

$$a = \sum_{i=1}^{5} a_i \cdot e_i, b = \sum_{i=1}^{5} b_i \cdot e_i \in F_M$$

定义换位运算

$$\begin{aligned} [a, b] = (& a_2 * b_3 - a_3 * b_2, 2a_1 * b_2 - 2a_2 * b_1, 2a_3 * b_1 \\ & -2a_1 * b_3, a_1 * b_4 - a_4 * b_1 + a_2 * b_5 - a_5 * b_2, \\ & a_5 * b_1 - a_1 * b_5 + a_3 * b_4 - a_4 * b_3) \end{aligned} \tag{5.174}$$

得到 loop 代数 $\tilde{F}_M$

$$\tilde{F}_M = \{a\lambda^n, a \in F_M, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\} \tag{5.175}$$

其换位运算为

$$[a\lambda^m, b\lambda^n] = [a, b]\lambda^{m+n}, \forall a, b \in F_M \tag{5.176}$$

根据 loop 代数 $\tilde{F}_M$, 我们很容易给出如下 loop 代数 $\tilde{F}_M$

$$
\begin{cases}
e_i(j,n)=e_i\lambda^{2n+j}, i=1,2,3,4,5; j=0,1\\
[e_1(i,m),e_2(j,n)]=\begin{cases}2e_1(i+j,m+n), i+j<2\\ 2e_1(0,m+n+1), i+j=2\end{cases}\\
[e_1(i,m),e_3(j,n)]=\begin{cases}-2e_3(i+j,m+n), i+j<2\\ -2e_3(0,m+n+1), i+j=2\end{cases}\\
[e_2(i,m),e_3(j,n)]=\begin{cases}e_1(i+j,m+n), i+j<2\\ e_1(0,m+n+1), i+j=2\end{cases}\\
[e_1(i,m),e_4(j,n)]=\begin{cases}e_4(i+j,m+n), i+j<2\\ e_4(0,m+n+1), i+j=2\end{cases}\\
[e_1(i,m),e_5(j,n)]=\begin{cases}-e_5(i+j,m+n), i+j<2\\ -e_5(0,m+n+1), i+j=2\end{cases}\\
[e_2(i,m),e_5(j,n)]=\begin{cases}e_4(i+j,m+n), i+j<2\\ e_4(0,m+n+1), i+j=2\end{cases}\\
[e_3(i,m),e_4(j,n)]=\begin{cases}e_5(i+j,m+n), i+j<2\\ e_5(0,m+n+1), i+j=2\end{cases}\\
[e_2(i,m),e_4(j,n)]=[e_3(i,m),e_5(j,n)]\\
\quad =[e_4(i,m),e_5(j,n)]=0, \deg(e_j(i,m))=2m+i
\end{cases}
\tag{5.177}
$$

令 $\tilde{F}_M(1)=\text{span}\{e_1(n),e_2(n),e_3(n)\}, \tilde{F}_M(2)=\text{span}\{e_4(n),e_5(n)\}$ 易证明

$$
\tilde{F}_M=\tilde{F}_M(1)\oplus\tilde{F}_M(2), \tilde{F}_M(1)\simeq\tilde{\tilde{G}}_M; [\tilde{F}(1),\tilde{F}_M(2)]\subset\tilde{F}_M(2) \tag{5.178}
$$

利用关系式 (5.177), 构造下列等谱问题

$$
\begin{cases}
\varphi_x=[U,\varphi], \lambda_t=0,\\
U=e_1(1,0)+u_1\cdot e_2(0,0)+u_2\cdot e_3(0,0)\\
\qquad +u_3\cdot e_2(1,-1)+u_4\cdot e_3(1,-1)+u_5\cdot e_1(1,-1)+u_6\cdot e_4(0,0)\\
\qquad +u_7\cdot e_5(0,0)+u_8\cdot e_4(1,-1)+u_9\cdot e_5(1,-1)
\end{cases}
\tag{5.179}
$$

其中 $u_i=(u_1^{(i)},u_2^{(i)},\cdots,u_9^{(i)})^T,i=1,\cdots,9.$

取

$$
\begin{aligned}
V=\sum_{m=0}^{\infty}&(a(0,m)\cdot e_1(0,-m)+a(1,m)\cdot e_1(1,-m)+b(0,m)\\
&\cdot e_2(0,-m)+b(1,m)\cdot e_2(1,-m)+c(0,m)\cdot e_3(0,-m)+c(1,m)\\
&\cdot e_3(1,-m)+d(0,m)\cdot e_4(0,-m)+d(1,m)\cdot e_4(1,-m)\\
&+f(0,m)\cdot e_5(0,-m)+f(1,m)\cdot e_5(1,-m)
\end{aligned}
$$

解零曲率方程, 得出

$$
\begin{aligned}
a_x(0,m)&=u_1*c(0,m)-u_2*b(0,m)+u_3*c(1,m)-u_4*b(1,m)\\
a_x(1,m+1)&=u_1*c(1,m+1)-u_2*b(1,m+1)+u_3*c(0,m)\\
&\quad-u_4*b(0,m)\\
b_x(0,m)&=2b(1,m+1)-2u_1*a(0,m)-2u_3*a(1,m)\\
&\quad+2u_5*b(1,m)\\
b_x(1,m+1)&=2b(0,m+1)-2u_1*a(1,m+1)-2u_3*a(0,m)\\
&\quad+2u_5*b(0,m)\\
c_x(0,m)&=-2c(1,m+1)+2u_2*a(0,m)+2u_4*a(1,m)\\
&\quad-2u_5*c(1,m)\\
c_x(1,m+1)&=-2c(0,m+1)+2u_2*a(1,m+1)+2u_4*a(0,m)\\
&\quad-2u_5*c(0,m)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_x(0,m)&=d(1,m+1)+u_1*f(0,m)+u_3*f(1,m)+u_5*d(1,m)\\
&\quad-u_6*a(0,m)-u_7*b(0,m)-u_8*a(1,m)-u_9*b(1,m)\\
d_x(1,m+1)&=d(0,m+1)+u_1*f(1,m+1)+u_3*f(0,m)\\
&\quad+u_5*d(0,m)-u_6*a(1,m+1)-u_7*b(1,m+1)\\
&\quad-u_8*a(0,m)-u_9*b(0,m)\\
f_x(0,m)&=-f(1,m+1)+u_2*d(0,m)+u_4*d(1,m)\\
&\quad-u_5*f(1,m)-u_6*c(0,m)+u_7*a(0,m)-u_8*c(1,m)\\
&\quad+u_9*a(1,m)\\
f_x(1,m+1)&=-f(0,m+1)+u_2*d(1,m+1)+u_4*d(0,m)\\
&\quad-u_5*f(0,m)-u_6*c(1,m+1)+u_7*a(1,m+1)\\
&\quad-u_8*c(0,m)+u_9*a(0,m)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&c(0,0)=b(0,0)=a(1,0)=b(1,0)=c(1,0)=d(0,0)=f(0,0)\\
&\quad=d(1,0)=f(1,0)=0,a(0,0)=\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_M)^T\\
&a(1,1)=0,b(1,1)=\alpha*u_1,c(1,1)=\alpha*u_2\\
&d(1,1)=\alpha*u_6,f(1,1)=\alpha*u_7,a(0,1)=-\frac{\alpha}{2}*u_1*u_2\\
&b(0,1)=\frac{\alpha}{2}*u_{1x}+\alpha*u_3,c(0,1)=\frac{\alpha}{2}*u_{2x}+\alpha*u_4\\
&f(0,1)=\alpha*u_9-\alpha*u_{7x},d(0,1)=\alpha*u_{6x}
\end{aligned}
\tag{5.180}
$$

令

$$
\begin{aligned}
V_+^{(n)}=\sum_{m=0}^{n}&(a(0,m)\cdot e_1(0,n-m)+a(1,-m)\cdot e_1(1,n-m)\\
&+b(0,m)\cdot e_2(0,n-m)+b(1,m)\cdot e_2(1,n-m)\\
&+c(0,m)\cdot e_3(0,n-m)+c(1,m)\cdot e_3(1,n-m)\\
&+d(0,m)\cdot e_4(0,n-m)+d(1,m)\cdot e_4(1,n-m)\\
&+f(0,m)\cdot e_5(0,n-m)+f(1,m)\cdot e_5(1,n-m))
\end{aligned}
$$

$V_-^{(n)}=\lambda^{2n}V-V_+^{(n)}$

通过直接计算, 有

$$
\begin{aligned}
-V_{+x}^{(n)}+[U,V_+^{(n)}]=&-2b(1,n+1)\cdot e(0,0)+2c(1,n+1)\cdot f(0,0)\\
&+[b_x(1,n+1)-2b(0,n+1)+2u_1*a(1,n+1)]\cdot e(1,-1)\\
&+[c_x(1,n+1)+2c(0,n+1)-2u_2*a(1,n+1)]\cdot f(1,-1)\\
&+[a_x(1,n+1)-u_1*c(1,n+1)+u_2*b(1,n+1)]\cdot h(1,-1)\\
&+[d_x(1,n+1)-d(0,n+1)-u_2*f(1,n+1)+u_6*a(1,n+1)\\
&+u_7*b(1,n+1)]\cdot e_4(1,-1)-d(1,n+1)\cdot e_4(0,0)+f(1,n+1)\\
&\cdot e_5(0,0)+[f_x(1,n+1)+f(0,n+1)-u_2*d(1,n+1)\\
&+u_6*c(1,n+1)-u_7*a(1,n+1)]\cdot e_5(1,-1)
\end{aligned}
$$

因此, 由零曲率方程

$$
U_t-V_{+x}^{(n)}+[U,V_+^{(n)}]=0 \tag{5.181}
$$

得出

$$u_t=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\\u_6\\u_7\\u_8\\u_9\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix}2b(1,n+1)\\-2c(1,n+1)\\-b_x(1,n+1)+2b(0,n+1)-2u_1a(1,n+1)\\-c_x(1,n+1)-2c(0,n+1)+2u_2a(1,n+1)\\-a_x(1,n+1)+u_1c(1,n+1)-u_2b(1,n+1)\\d(1,n+1)\\A\\B\end{pmatrix}$$

$$=\tilde{J}_1\begin{pmatrix}c(0,n+1)\\b(0,n+1)\\c(1,n+1)\\b(1,n+1)\\\frac{1}{2}a(1,n+1)\\d(0,n+1)\\f(0,n+1)\\d(1,n+1)\\f(1,n+1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}b_x(0,n)+2u_1*a(0,n)+2u_3*a(1,n)-2u_5*b(1,n)\\c_x(0,n)-2u_2*a(0,n)-2u_4*a(1,n)+2u_5*c(1,n)\\2u_3*a(1,n)-2u_5*b(0,n)\\-2u_4*a(0,n)+2u_5*c(0,n)\\-u_3*c(0,n)+u_4*b(0,n)\\C\\D\\-u_3*f(0,n)-u_5*d(0,n)+u_8*a(0,n)+u_9*b(0,n)\\-u_4*d(0,n)+u_5*f(0,n)+u_8*c(0,n)-u_9*a(0,n)\end{pmatrix}$$

$$
= \begin{pmatrix} M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(0,n) \\ b(0,n) \\ c(1,n) \\ b(1,n) \\ \frac{1}{2}a(1,n) \\ d(0,n) \\ f(0,n) \\ d(1,n) \\ f(1,n) \end{pmatrix} = \tilde{J}_2 \begin{pmatrix} c(0,n) \\ b(0,n) \\ c(1,n) \\ b(1,n) \\ \frac{1}{2}a(1,n) \\ d(0,n) \\ f(0,n) \\ d(1,n) \\ f(1,n) \end{pmatrix} \tag{5.182}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
A = & -f(1,n+1) - d_x(1,n+1) + d(0,n+1) + u_2 f(1,n+1) \\
& -u_6 a(1,n+1) - u_7 b(1.n+1) \\
B = & -f_x(1,n+1) - f(0,n+1) + u_2 d(1,n+1) - u_6 c(1,n+1) \\
& +u_7 a(1,n+1)
\end{aligned}
$$

$$
\tilde{J}_1 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 2I_M* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2I_M* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2I_M* & 0 & -\partial & -u_1* & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2I_M* & 0 & -\partial & 0 & u_2* & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & u_1* & -u_2* & -\frac{\partial}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_M* & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_M* & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & u_7* & -2u_6* & I_M* & 0 & -\partial & u_2* \\
0 & 0 & -u_6* & 0 & 2u_7* & 0 & -I_M* & u_2* & -\partial
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
C = & d_x(0.n) - u_2 * f(0,n) - u_3 * f(1,n) - u_5 * d(1,n) u_6 * a(0,n) \\
& + u_7 * b(0,n) + u_8 * a(1,n) + u_9 * b(1,n)
\end{aligned}
$$

$$
D - d_x(0.n) - u_2 * f(0,n) - u_3 * f(1,n) - u_5 * d(1,n) + u_6 * a(0,n)
$$

$$+u_7*b(0,n)+u_8*a(1,n)+u_9*b(1.n)$$

$$M=\begin{pmatrix} 2u_1*\partial^{-1}u_1* & \partial-2u_1*\partial^{-1}u_2* & 2u_1*\partial^{-1}u_3* \\ \partial-2u_2*\partial^{-1}u_1* & 2u_2*\partial^{-1}u_2* & 2u_5*-2u_2*\partial^{-1}u_3* \\ 2u_3*\partial^{-1}u_1* & -2u_5*-2u_3*\partial^{-1}u_2* & 2u_3*\partial^{-1}u_3* \\ 2u_5*-2u_4*\partial^{-1}u_1* & 2u_4*\partial^{-1}u_2* & -2u_4*\partial^{-1}u_3* \\ u_3* & u_4* & 0 \\ u_6*\partial^{-1}u_1* & u_7*-u_6*\partial^{-1}u_2* & u_6*\partial^{-1}u_3* \\ u_6*-u_7*\partial^{-1}u_1* & u_7*\partial^{-1}u_2* & u_8*-u_7*\partial^{-1}u_3* \\ u_8*\partial^{-1}u_1* & u_9*-u_8*\partial^{-1}u_2* & u_8*\partial^{-1}u_3* \\ u_8*-u_9*\partial^{-1}u_1* & -u_9*\partial^{-1}u_2* & -u_9*\partial^{-1}u_3* \end{pmatrix}$$

$$N=\begin{pmatrix} -2u_5*-2u_1*\partial^{-1}u_4* & u_3* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2u_2*\partial^{-1}u_4* & -u_4* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2u_3*\partial^{-1}u_4* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2u_4*\partial^{-1}u_4* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_9*-u_6*\partial^{-1}u_4* & 2u_8* & \partial & -u_2* & u_5* & -u_3* \\ u_7*\partial^{-1}u_4* & -2u_9* & -u_2* & -\partial & -u_4* & u_5* \\ -u_8*\partial^{-1}u_4* & 0 & -u_5* & -u_3* & 0 & 0 \\ u_9*\partial^{-1}u_4* & 0 & -u_4* & u_5* & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

根据 (5.180), 得到递推算子

$$L=\begin{pmatrix} L_1 & L_2 \end{pmatrix}$$

其中

$$L_1=\begin{pmatrix} M_1 & N_1 & P_1 & Q_3 & W_1 \\ M_2 & N_2 & P_2 & P_3 & W_2 \\ T_1 & -u_2*\partial^{-1}u_2* & -u_5*+u_2*\partial^{~1}u_3* & H_1 & 2u_4* \\ T_2 & \frac{\partial}{2}-u_1*\partial^{-1}u_2* & u_1*\partial^{-1}u_3* & H_2 & 2u_3* \\ T_3 & \partial^{-1}(-\frac{1}{4}u_2*\partial-\frac{1}{2}u_4*) & -\frac{1}{2}\partial^{-1}u_1*u_5* & H_3 & S_3 \\ M_3 & N_3 & P_4 & Q_1 & R_1 \\ M_4 & N_4 & P_5 & Q_2 & R_2 \\ S_1 & u_7*-u_6\partial^{~1}u_2* & u_6*\partial^{-1}u_3* & H_4 & 2u_8* \\ S_2 & 0 & u_7*\partial^{-1}u_3*-u_8* & H_5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_1 & -\partial u_2*+u_2*\partial-u_3* & -\partial u_5*-u_2*u_4* & -\partial u_3*+u_2*u_5* \\ K_2 & \partial^2-u_2*u_2*-u_5* & -\partial u_4*-u_2*u_5* & \partial u_5*-u_2*u_3* \\ \partial & -u_1* & -u_5* & -u_3* \\ u_2* & -\partial & u_4* & -u_5* \end{pmatrix}$$

$$T_1=-\frac{\partial}{2}+u_2*\partial^{~1}u_1*$$

$$T_2=u_1*\partial^{-1}u_1*$$

$$T_3=\partial^{-1}(\frac{1}{2}u_3*-\frac{1}{4}u_1*\partial)$$

$$S_1=u_6*\partial^{-1}u_1*$$

$$S_2=u_7*\partial^{-1}u_1*-u_6*$$

$$S_3=\partial^{~1}(u_1*u_4*-u_2*u_3*)$$

$$W_1=-\partial u_4*+2u_2*\partial^{~1}(u_1*u_4-u_2*u_3)*$$

$$W_2 = \partial u_3 * +2u_1 * \partial^{-1}(u_1 * u_4 - u_2 * u_3) *$$

$$M_3 = \partial u_6 * \partial^{-1} u_1 * +u_2 * u_6 * -\frac{1}{2} u_6 * \partial^{-1} u_1 * \partial$$
$$+u_6 * \partial^{-1} u_3 * +u_8 * \partial^{-1} u_1 *$$

$$N_3 = \partial(u_7 * -u_6 * \partial^{-1} u_2 *) - \frac{1}{2} u_6 * \partial u_2 * \partial - u_6 * \partial^{-1} u_4 *$$
$$+u_7 * (\frac{\partial}{2} - u_1 * \partial^{-1} u_2 *) - u_8 * \partial^{-1} u_2 * +u_9 *$$

$$P_4 = \partial u_6 * \partial^{-1} u_3 * +u_2 * u_8 * -u_6 * \partial^{-1} u_1 * u_5 * +u_8 * \partial^{-1} u_3 *$$

$$Q_1 = \partial(u_9 * -u_6 * \partial^{-1} u_4 *) + u_2 * u_7 * \partial^{-1} u_4 * +u_6 * \partial^{-1} u_2 * u_5 *$$
$$-u_5 * u_7 * u_1 * u_7 * \partial^{-1} u_4 * -u_8 * \partial^{-1} u_4 *$$

$$H_1 = -u_2 * \partial^{-1} u_4 *$$

$$H_2 = -u_5 * -u_1 * \partial^{-1} u_4 *$$

$$K_2 = -\partial u_2 * +u_2 * \partial + u_4 *$$

$$R_1 = 2\partial u_8 * -2u_2 * u_9 * +2u_6 * \partial^{-1}(u_1 * u_4 - u_2 * u_3) *$$
$$+2u_3 * u_7 *$$

$$M_4 = \partial u_6 * -\partial u_7 * \partial^{-1} u_1 * +u_6 * \partial^{-1} u_1 * +u_6 * (\frac{\partial}{2} - u_2 * \partial^{-1} u_1 *)$$
$$-\frac{1}{2} u_7 * \partial^{-1} u_1 * \partial + u_7 * \partial^{-1} u_3 * -u_8 * +u_9 * \partial^{-1} u_1 *$$

$$N_4 = u_2 * u_7 * -\frac{1}{2} u_7 * \partial^{-1} u_2 * \partial - u_7 * \partial^{-1} u_4 * -u_9 * \partial^{-1} u_2 *$$

$$P_5 = \partial u_8 * -\partial u_7 * \partial^{-1} u_3 * +u_2 * u_6 * \partial^{-1} u_3 * +u_6 * u_5 *$$
$$-u_2 * u_6 * \partial^{-1} u_3 * -u_7 * \partial^{-1} u_1 * u_5 * +u_9 * \partial^{-1} u_3 *$$

$$Q_2 = \partial u_7 * \partial^{-1} u_4 * +u_2 * u_9 * +u_7 * \partial^{-1} u_2 * u_5 * -u_9 * \partial^{-1} u_4 *$$

$$R_2 = -\partial u_9 * +u_2 * u_8 * -u_4 * u_6 * +u_7 * \partial^{-1}(u_1 * u_4 * -u_2 * u_3 *)$$

$$Q_3 = u_2 * \partial^{-1} u_2 * u_5 * +(\frac{\partial}{2} u_2 * -u_4 *)\partial^{-1} u_4 *$$

$$H_3 = -\frac{1}{2} \partial^{-1} u_2 * u_5 *, H_4 = u_9 * -u_6 * \partial^{-1} u_4 *$$

$$H_5 = -u_7 * \partial^{-1} u_4 *, K_1 = \partial^2 - u_2 * u_2 * -u_5 *$$

这里的 $M_1, N_1, P_1, M_2, N_2, P_2, P_3$ 与式 (5.172) 算子 $L$ 中的一样. 因此, 系统 (5.182) 可以写成

$$u_t = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix}_t = \tilde{J}_1 L^n \begin{pmatrix} c(0,1) \\ b(0,1) \\ c(1,1) \\ b(1,1) \\ \frac{1}{2}a(1,1) \\ d(0,1) \\ f(0,1) \\ d(1,1) \\ f(1,1) \end{pmatrix} \tag{5.183}$$

$$u_t = \tilde{J}_2 L^{n-1} \begin{pmatrix} c(0,1) \\ b(0,1) \\ c(1,1) \\ b(1,1) \\ \frac{1}{2}a(1,1) \\ d(0,1) \\ f(0,1) \\ d(1,1) \\ f(1,1) \end{pmatrix} \tag{5.184}$$

根据可积耦合的定义, 系统 (5.183) 和 (5.184) 是多分量方程族 (5.172) 的双多分量可积耦合.

### 5.8.3 一个多分量高维 loop 代数及其应用

下面以已有的二个 Lie 代数为基础, 通过线性组合得到了二个 6 维的 Lie 代数, 然后构造出相应的 loop 代数. 作为应用, 利用其中一个 loop 代数获得多分量 AKNS 方程族的扩展可积系统, 给出了求可积耦合的一种简便方法.

Lie 代数 $A_1$ 的二个子代数:

$A_{11} = \mathrm{span}\{h, e, f\}$

其中,$h=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, e=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, f=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.
换位运算为 $[h,e]=2e, [h,f]=-2f, [e,f]=h$.

$$A_{12}=\text{span}\left\{\bar{h}, e_{\pm}\right\}$$

其中,$\bar{h}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, e_{\pm}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ \pm 1 & 0\end{pmatrix}$.
换位运算为 $[h,e_{\pm}]=e_{\mp}, [e_-,e_+]=h$. 这里 span 表示张成的子空间. 设

$$a=a_1h+a_2e+a_3f, b - b_1h+b_2e+b_3f$$

则利用 Lie 代数 $A_{11}$ 有:

$$[a,b]_1=(a_2b_3-a_3b_2)h+2(a_1b_2-a_2b_1)e+2(a_3b_1-a_1b_3)f$$

$$\equiv\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\ 2(a_1b_2-a_2b_1)\\ 2(a_3b_1-a_1b_3)\end{pmatrix}$$

利用 Lie 代数 $A_{12}$ 有:

$$[a,b]_2=(a_3b_2-a_2b_3)\bar{h}+(a_1b_3-a_3b_1)e_+ + (a_1b_2-a_2b_1)e_-$$

$$\equiv\begin{pmatrix}a_3b_2 \quad a_2b_3\\ a_1b_3-a_3b_1\\ a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$

令 $R^3=\{X=(a_1,a_2,a_3)^T\}, a_i(i=1,2,3)$ 是纯量或函数. 作映射 $f: R^3\to A_1: X\to\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & -a_1\end{pmatrix}$ 则可验证 $f$ 是一个同构映射. 因此 $R^3$ 是一个 Lie 代数, 其中的换位运算为 $[a,b]_1, [a,b]_2$.

考虑线性空间

$$V^6=\{X=(a_1,a_2,\cdots,a_6)^T\}$$

$a_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 是纯量或函数.

设 $c=a_4h+a_5e+a_6f, d=b_4h+b_5e+b_6f$, 在 $V^6$ 定义下面两个运算

$$\{a,b\}_1=\begin{pmatrix}[a,b]_1\\ [a,d]_1+[c,b]_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\ 2(a_1b_2-a_2b_1)\\ 2(a_3b_1-a_1b_3)\\ a_2b_6-a_6b_2+a_5b_3-a_3b_5\\ 2(a_1b_5-a_5b_1+a_4b_2-a_2b_4)\\ 2(a_3b_4-a_4b_3+a_6b_1-a_1b_6)\end{pmatrix}$$

$$\{a,b\}_2=\begin{pmatrix}[a,b]_2\\ [a,d]_2+[c,b]_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_3b_2-a_2b_3\\ a_1b_3-a_3b_1\\ a_1b_2-a_2b_1\\ a_3b_5-a_5b_3+a_6b_2-a_2b_6\\ a_1b_6-a_6b_1+a_4b_3-a_3b_4\\ a_1b_5-a_5b_1+a_4b_2-a_2b_4\end{pmatrix}$$

可直接验证:

$$\{a,b\}_1=-\{b,a\}_1,\{a,b\}_2=-\{b,a\}_2$$

$$\{\{a,b\}_i,c\}_i+\{\{b,c\}_i,a\}_i+\{\{c,a\}_i,b\}_i=0,i=1,2$$

因此,$V^6$ 在 $\{a,b\}_1$ 和 $\{a,b\}_2$ 都是 Lie 代数. 若设 $\{a(m),b(n)\}_i=\{a,b\}_i\lambda^{n+m}(i=1,2)$ 则得二个相应的 loop 代数.

为应用方便, 可定义 $V^6$ 的一组基, 使得 $V^6$ 在 $\{a,b\}_i$ 下 Lie 代数与所得 Lie 代数等价. 比如, 令 $e_1=\{1,0,0,0,0,0\}^T,e_2=\{0,1,0,0,0,0\}^T,\cdots,e_6=\{0,0,0,0,0,1\}^T$, 定义它们的换位运算为:

$$[e_1,e_2]=e_3,[e_1,e_3]=e_2,[e_2,e_3]=-e_1,[e_3,e_5]=[e_6,e_2]=e_4$$
$$[e_1,e_6]=[e_4,e_3]=e_5,[e_1,e_5]=[e_4,e_2]=e_6,[e_1,e_4]=[e_2,e_5]$$
$$=[e_3,e_6]=[e_4,e_5]=[e_4,e_6]=[e_5,e_6]=0,[e_j,e_j]=0,1\le j\le 6$$

取

$$a=\sum_{i=1}^{6}a_ie_i,\quad b=\sum_{i=1}^{6}b_ie_i$$

则

$$[\bar{a},\bar{b}]=(a_3b_2-a_2b_3)e_1+(a_1b_3-a_3b_1)e_2+(a_1b_2-a_2b_1)e_3$$
$$+(a_3b_5-a_5b_3+a_6b_2-a_2b_6)e_4+(a_1b_6-a_6b_1+a_4b_3-a_3b_4)e_5$$
$$+(a_1b_5-a_5b_1+a_4b_2-a_2b_4)e_6=\{a,b\}_2$$

由此可见，利用 $\{e_i\}_{i=1}^6$ 对应的 loop 代数设计的等谱问题与 $\{a,b\}_2$ 是一样的.

考虑下面的广义等谱问题：

$$\begin{cases}(\partial_x+\xi\partial_t)\psi=\xi R\psi\\ -\xi\psi_x=(P-\xi Q)\psi,\xi_t=0\end{cases}\tag{5.185}$$

其相容性条件为

$$\begin{cases}P_x=0\\ P_t-Q_x+[P,R]=0\\ Q_t-R_x+[Q,R]=0\end{cases}\tag{5.186}$$

由此得广义零曲率方程：

$$\begin{cases}P_x=0\\ (P+Q)_t-Q_x-R_x+[P+Q,R]=0\end{cases}\tag{5.187}$$

取

$$Q=(\lambda,q,r,0,u_1,u_2)^T,P=(k,0,0,0,0,0)^T$$
$$R=(a,b,c,d,f,h)^T=\sum_{m\geq 0}[a_me_1(-m)+b_me_2(-m)+c_me_3(-m)$$
$$+d_me_4(-m)+f_me_5(-m)+h_me_6(-m)]$$

解静态零曲率方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}R=[P+Q,R]\tag{5.188}$$

得递推关系

$$
\begin{cases}
a_{mx} = -qc_m + rb_m, c_{m+1} = b_{mx} - kc_m + ra_m \\
b_{m+1} = c_{mx} - kb_m + qa_m \\
d_{mx} = -qh_m + rf_m - u_1 c_m + u_2 b_m c \\
h_{m+1} = f_{mx} - kh_m + rd_m + u_2 a_m \\
h_{mx} = f_{m+1} + kf_m - qd_m - u_1 a_m \\
a_0 = \alpha, b_0 = c_0 = f_0 = h_0 = 0, a_1 = 0, b_1 = \alpha q \\
c_1 = \alpha r, f_1 = \alpha u_1, h_1 = \alpha u_2, d_1 = 0, \cdots
\end{cases}
\tag{5.189}
$$

记 $R_+^{(n)} = \sum\limits_{m=0}^{n} (a_m, b_m, c_m, d_m, f_m, h_m)^T \lambda^{n-m}$, $R_+^{(n)} + R_-^{(n)} = \lambda^n R$. 则方程 (5.188) 可写为:

$$
-\frac{\partial}{\partial x} R_+^{(n)} + [P+Q, R_+^{(n)}] = \frac{\partial}{\partial x} R_-^{(n)} - [P+Q, R_-^{(n)}] \tag{5.190}
$$

(5.190) 式左端所含基元阶数 $\geq 0$, 右端所含基元阶数 $\leq 0$. 因此 (5.190) 式两端所含基元阶数为 0. 于是

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x} R_+^{(n)} + [P+Q, R_+^{(n)}] &= -c_{n+1} e_2(0) - b_{n+1} e_3(0) - h_{n+1} e_5(0) \\
&\quad - f_{n+1} e_6(0) = (0, -c_{n+1}, -b_{n+1}, 0, -h_{n+1}, -f_{n+1})^T
\end{aligned}
$$

记 $R^{(n)} = R_+^{(n)}$, 则零曲率方程 (5.187) 确定可积系

$$
\begin{aligned}
u_{tn} - \begin{pmatrix} q \\ r \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{t-x} &= \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ b_{n+1} \\ h_{n+1} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ -c_{n+1} \\ f_{n+1} \\ -h_{n+1} \end{pmatrix} = JP_{n+1}
\end{aligned}
\tag{5.191}
$$

其中 $J$ 是 Hamilton 算子. 根据递推关系 (5.189) 可知:

$$P_{n+1} = LP_n$$

其中

$$L = \begin{pmatrix} q\partial^{-1}r - k & -\partial + q\partial^{-1}q & 0 & 0 \\ -\partial - r\partial^{-1}r & -k - r\partial^{-1}q & 0 & 0 \\ q\partial^{-1}u_2 + u_1\partial^{-1}r & A & B & E \\ -r\partial^{-1}u_2 - u_2\partial^{-1}r & -r\partial^{-1}u_1 - u_2\partial^{-1}q & C & D \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned} &A = q\partial^{-1}u_1 + u_1\partial^{-1}q, B = -k + q\partial^{-1}r \\ &E = -\partial + q\partial^{-1}q, C = -\partial - r\partial^{-1}r, D = -k - r\partial^{-1}q \end{aligned}$$

于是 (5.191) 可写为

$$u_{tn} = JL^n \begin{pmatrix} \alpha q \\ -\alpha r \\ \alpha u_1 \\ -\alpha u_2 \end{pmatrix} \tag{5.192}$$

当取 $u_1 = u_2 = 0$ 时, 系统 (5.192) 约化为著名的 AKNS 方程族. 因此可视 (5.192) 为 AKNS 方程族的扩展可积模型, 也是 AKNS 方程族的一类可积耦合. 容易看出,$JL = L^*J$, 因此 (5.192) 是 Liouville 可积扩展系统.

## 5.9 (2+1) 维多分量可积系统及其可积耦合

前面几节, 我们通过构造低维等谱问题得到了一些著名的方程. 现在给出一个 (2+1) 维等谱问题, 利用 loop 代数 $\tilde{A}_1$, 得到可积方程族. 通过扩展的 loop 代数得到其可积耦合并利用 $\tilde{G}_M$ 得到多分量可积系统及其相应的可积耦合.

### 5.9.1 一个 (2+1) 维的可积系统

记

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial w}=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}$$

零曲率方程

$$U_w-V_z+[U,V]=0 \tag{5.193}$$

可以写为 (2+1) 维的形式

$$U_t-V_y+[U,V]+V_x-U_x=0 \tag{5.194}$$

上式满足下面 Lax 对的相容性

$$\begin{cases}\varphi_y=\varphi_x+U\varphi\\ \varphi_t=\varphi_x+V\varphi,\lambda_t=0\end{cases} \tag{5.195}$$

我们想利用 (5.194) 或 (5.195) 式来得到一族孤立子方程, 而不是单个的方程. 下面我们以 AKNS 等谱问题为例来说明这种思想.

考虑 loop 代数

$$\begin{cases}h(n)=\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\ 0 & -\lambda^n\end{pmatrix},e(n)=\begin{pmatrix}0 & \lambda^n\\ 0 & 0\end{pmatrix},f(n)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \lambda^n & 0\end{pmatrix}\\ [h(m),e(n)]=2e(m+n),[h(m),f(n)]=-2f(m+n)\\ [e(m),f(n)]=h(m+n),\\ \deg(h(n))=\deg(e(n))=\deg(f(n))=n\end{cases} \tag{5.196}$$

利用 (5.196),AKNS 等谱问题可以表示为:

$$\varphi_x=U\varphi,U=-h(1)+qe(0)+rf(0) \tag{5.197}$$

其中 $q,r$ 为位势函数.

令

$$V=\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}=ah(0)+be(0)+cf(0)$$

其中 $a=\sum\limits_{m\geq 0} a_m\lambda^{-m}, b=\sum\limits_{m\geq 0} b_m\lambda^{-m}, c=\sum\limits_{m\geq 0} c_m\lambda^{-m}$.
解静态零曲率方程

$$V_y - V_x = [U, V] \tag{5.198}$$

得到

$$\begin{cases} a_{my} = qc_m - rb_m + a_{mx}, 2b_{m+1} = -b_{my} - 2qa_m + b_{mx} \\ 2c_{m+1} = c_{my} - 2ra_m - c_{mx}, b_0 = c_0 = 0, a_0 = \alpha, a_1 = 0 \\ b_1 = -aq, c_1 = -\alpha\lambda, a_2 = -\dfrac{\alpha}{2}qr, b_2 = \dfrac{\alpha}{2}(q_y - q_x) \\ c_2 = \dfrac{\alpha}{2}(r_x - r_y), a_3 = \dfrac{\alpha}{4}(q_y r - rq_x + qr_x - qr_y) \\ b_3 = \dfrac{\alpha}{4}(2q_{xy} - q_{xx} - q_{yy}) + \dfrac{\alpha}{2}q^2 r \\ c_3 = \dfrac{\alpha}{4}(2r_{xy} - r_{yy} - r_{xx}) + \dfrac{\alpha}{2}r^2 q \end{cases} \tag{5.199}$$

记

$$\begin{cases} V_+^{(n)} = \sum\limits_{m=0}^{n} (a_m e_1(n-m) + b_m e_2(n-m) + c_m e_3(n-m)) \\ V_+^{(n)} + V_-^{(n)} = \lambda^n V \end{cases}$$

直接计算得

$$-V_{+y}^{(n)} + \left[U, V_+^{(n)}\right] + V_{+x}^{(n)} = 2b_{n+1}e(0) - 2c_{n+1}f(0)$$

由零曲率方程

$$U_t - U_x - V_{+y}^{(n)} + \left[U, V_+^{(n)}\right] + V_{+x}^{(n)} = 0$$

得到 (2+1) 维的 AKNS 族

$$\begin{cases} q_t - q_x = 2b_{n+1} \\ r_t - r_x = -2c_{n+1} \end{cases} \tag{5.200}$$

令 $n=2$, 系统 (5.200) 约化为下面的非线性演化方程

$$\begin{cases} q_t = q_x + \dfrac{\alpha}{2}(2q_{xy} - q_{xx} - q_{yy}) + \alpha q^2 r \\ r_t = r_x - \dfrac{\alpha}{2}(2r_{xy} - r_{yy} - r_{xx}) - \alpha qr^2 \end{cases} \tag{5.201}$$

令 $n=3$, 系统 (5.200) 约化为 (2+1) 维耦合方程

$$\begin{cases} q_t = q_x + \dfrac{\alpha}{4}(3q_{xxy} - 3q_{xyy} - q_{xxx} + q_{yyy}) + \dfrac{3\alpha}{2}(qq_x r - qq_y r) \\ r_t = r_x - \dfrac{\alpha}{4}(3r_{xyy} - 3r_{xxy} - r_{yyy} + r_{xxx}) - \dfrac{3\alpha}{2}(rr_y q - rr_x q) \end{cases} \tag{5.202}$$

## 5.9.2 扩展可积系统

根据可积耦合的定义, 系统 (5.200) 的可积耦合是扩展可积族.

考虑 loop 代数 $\tilde{G}$: $\tilde{G}=\mathrm{span}\{e_i(n), i=1,2,3,4,5\}$ 且换位运算为

$$\begin{cases} [e_1(m), e_2(n)] = 2e_2(m+n), [e_1(m), e_3(n)] = -2e_3(m+n) \\ [e_2(m), e_3(n)] = e_1(m+n), [e_1(m), e_4(n)] = e_4(m+n) \\ [e_1(m), e_5(n)] = -e_5(m+n), [e_2(m), e_4(n)] = 0 \\ [e_2(m), e_5(n)] = e_4(m+n), [e_3(m), e_4(n)] = e_5(m+n) \\ [e_3(m), e_5(n)] = [e_4(m), e_5(n)] = 0, e_i(n) = e_i \otimes \lambda^n \\ [e_i(m), e_j(n)] = [e_i, e_j]\lambda^{m+n}, 1 \le i, j \le 5, \deg e_i(n) = n \end{cases}$$

在 loop 代数 $\tilde{G}$ 下, 解静态零曲率方程

$$\begin{aligned} &\sum_{m\ge 0}[(a_{my}-a_{mx})e_1(-m)+(b_{my}-b_{mx})e_2(-m) \\ &\quad +(c_{my}-c_{mx})e_3(-m)+(d_{my}-d_{mx})e_4(-m) \\ &\quad +(f_{my}-f_{mx})e_5(-m)] \\ =&\sum_{m\ge 0}[(-e_1(1)+u_1e_2(0)+u_2e_3(0)+u_3e_4(0)+u_4e_5(0))a_me_1(-m) \\ &\quad +b_me_2(-m)+c_me_3(-m)+d_me_4(-m)+f_me_5(-m)] \end{aligned}$$

得到递推关系

$$
\begin{cases}
a_{my} = u_1 c_m - u_2 b_m + a_{mx} \\
2b_{m+1} = b_{mx} - b_{my} - 2u_1 a_m \\
2c_{m+1} = c_{my} - b_{mx} - 2u_2 a_m \\
d_{m+1} = d_{mx} - d_{my} + u_1 f_m - u_3 a_m - u_4 b_m \\
f_{m+1} = -f_{mx} + f_{my} - u_2 d_m + u_3 c_m - u_4 a_m \\
a_0 = \alpha, b_0 = c_0 = d_0 = f_0 = 0, a_1 = 0 \\
b_1 = -\alpha u_1, c_1 = -\alpha u_2, d_1 = \alpha u_3, f_1 = -\alpha u_4 \\
a_2 = -\frac{\alpha}{2} u_1 u_2, b_2 = \frac{\alpha}{2}(u_{1y} - u_{1x}), c_2 = \frac{\alpha}{2}(u_{2x} - u_{2y}) \\
d_2 = \alpha(u_{3x} - u_{3y}), f_2 = \alpha(u_{4x} - u_{4y}) \\
a_3 = \frac{\alpha}{4}(-u_2 u_{1x} + u_2 u_{1y} + u_1 u_{2x} - u_1 u_{2y}) \\
b_3 = \frac{\alpha}{4}(2u_{1xy} - u_{1xx} - u_{1yy}) + \frac{\alpha}{2} u_1^2 u_2 \\
c_3 = \frac{\alpha}{4}(2u_{2xy} - u_{2yy} - u_{2xx}) + \frac{\alpha}{2} u_2^2 u_1 \\
d_3 = \alpha(u_{3xx} - 2u_{3xy} + u_{3yy} + u_1 u_{4x} - u_1 u_{4y} \\
\qquad + \frac{1}{2} u_1 u_2 u_3 - \frac{1}{2} u_{1y} u_4 + \frac{1}{2} u_{1x} u_4) \\
f_3 = \alpha(-u_{4yy} + 2u_{4xy} - u_{4xx} - u_2 u_{3x} + u_2 u_{3y} \\
\qquad - \frac{1}{2} u_3(u_{2y} - u_{2x}) + \frac{1}{2} u_1 u_2 u_4)
\end{cases}
\tag{5.203}
$$

记

$$
\begin{aligned}
V_+^{(n)} &= \sum_{m=0}^{n} (a_m e_1(n-m) + b_m e_2(n-m) + c_m e_3(n-m) \\
&\qquad + d_m e_4(n-m) + f_m e_5(n-m)) \\
V_-^{(n)} &= \lambda^n V - V_+^{(n)}
\end{aligned}
$$

我们得到 $-V_{+y}^{(n)} + V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = 2b_{n+1}e_2(0) - 2c_{n+1}e_3(0) + d_{n+1}e_4(0) - f_{n+1}e_5(0)$. 令 $V^{(n)} = V_+^{(n)}$, 由零曲率方程

$$
U_t - U_x - V_y^{(n)} + V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] = 0 \tag{5.204}
$$

确定可积系

$$\begin{cases} u_{1t} = -2b_{n+1} + u_{1x} \\ u_{2t} = 2c_{n+1} + u_{2x} \\ u_{3t} = -d_{n+1} + u_{3x} \\ u_{4t} = f_{n+1} + u_{4x} \end{cases} \tag{5.205}$$

令 $u_1 = q, u_2 = r, u_3 = u_4 = 0$,(5.223) 式约化为 (5.218). 因此 (5.223) 是 (5.218) 的扩展可积族. 利用 (5.223) 式我们可以得到 (5.219) 和 (5.220) 的扩展可积模型. 例如, 令 $n = 2$, 我们就可以得到 (5.219) 的扩展可积模型:

$$\begin{cases} u_{1t} = \dfrac{\alpha}{2}(2u_{1xy} - u_{1xx} - u_{1yy}) + \alpha u_1^2 u_2 + u_{1x} \\ u_{2t} = \dfrac{\alpha}{2}(u_{2yy} + u_{2xx} - 2u_{2xy}) - \alpha u_1 u_2^2 \\ u_{3t} = \alpha(-u_{3xx} + 2u_{3xy} - u_{3yy} - u_1u_{4x} + u_1u_{4y} - \dfrac{1}{2}u_1u_2u_3 \\ \qquad + \dfrac{1}{2}u_{1y}u_4 - \dfrac{1}{2}u_{1x}u_4) + u_{3x} \\ u_{4t} = \alpha(-u_{4yy} + 2u_{4xy} - u_{4xx} - u_2u_{3x} + u_2u_{3y} + \dfrac{1}{2}u_3u_{2x} \\ \qquad - \dfrac{1}{2}u_3u_{2y} + \dfrac{1}{2}u_1u_2u_4) + u_{4x} \end{cases}$$

### 5.9.3 多分量可积系统

引入如下定义

**定义 5.9.1**

$$G_M = \{a = (a_{ij})_{M\times 3} = (a_1, a_2, a_3)\} \tag{5.206}$$

其中 $a_i$ 代表矩阵 $a$ 的第 $i$ 列,$M$ 是已知正整数.

**定义 5.9.2** 若

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_M)^T, \beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_M)^T$$

是两个向量, 定义它们的向量积 $\alpha * \beta$ 为

$$\alpha * \beta = \beta * \alpha = (\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \cdots, \alpha_M\beta_M)^T \tag{5.207}$$

**定义 5.9.3** 设

$$a=(a_1,a_2,a_3),b=(b_1,b_2,b_3)\in G_M$$

其换位运算 $[a,b]$ 定义为

$$[a,b]=(a_2*b_3-a_3*b_2,2(a_1*b_2-a_2*b_1),2(a_3*b_1-a_1*b_3)) \quad (5.208)$$

**定义 5.9.4** 令

$$\tilde{G}_M=\{a\lambda^n,a\in G_M,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\} \quad (5.209)$$

有如下的换位运算

$$[a\lambda^m,b\lambda^n]=[a,b]\lambda^{m+n},\forall a,b\in G_M \quad (5.210)$$

根据 (5.206)~(5.210), 我们可得 $\tilde{G}_M$ 是一个 loop 代数.

考虑等谱问题

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \vdots\\ \varphi_M\end{pmatrix}_y=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \vdots\\ \varphi_M\end{pmatrix}_x+\left[(\lambda^2 I_M,q,r),\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \vdots\\ \varphi_M\end{pmatrix}\right] \quad (5.211)$$

其中, $I_M=(1,1,\cdots,1)^T_{1\times M}$, $q=(q_1,q_2,\cdots,q_M)^T$, $r=(r_1,r_2,\cdots,r_M)^T$

令

$$V=\sum_{m\geq 0}(a_m,b_m,c_m)\lambda^{-2m}$$

其中, $a_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mM})^T$, $b_m=(b_{m1},b_{m2},\cdots,b_{mM})^T$, $c_m=(c_{m1},c_{m2},\cdots,c_{mM})^T$.

解如下方程

$$\sum_{m\geq 0}\left[\begin{pmatrix} a_{m1} \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{mM} \end{pmatrix}_y - \begin{pmatrix} a_{m1} \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{mM} \end{pmatrix}_x, \begin{pmatrix} b_{m1} \\ b_{m2} \\ \vdots \\ b_{mM} \end{pmatrix}_y - \begin{pmatrix} b_{m1} \\ b_{m2} \\ \vdots \\ b_{mM} \end{pmatrix}_x,\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} c_{m1} \\ c_{m2} \\ \vdots \\ c_{mM} \end{pmatrix}_y - \begin{pmatrix} c_{m1} \\ c_{m2} \\ \vdots \\ c_{mM} \end{pmatrix}_x \right]\lambda^{-2m}$$

$$= \sum_{m\geq 0}[(\lambda^2 I_M, q, r), (a_m, b_m, c_m)\lambda^{-2m}]$$

得到

$$\begin{pmatrix} a_{m1} \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{mM} \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_M \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_{m1} \\ c_{m2} \\ \vdots \\ c_{mM} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_M \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{m1} \\ b_{m2} \\ \vdots \\ b_{mM} \end{pmatrix}$$

$$+ (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mM})_x^T$$

$$2\begin{pmatrix} b_{m+1,1} \\ b_{m+1,2} \\ \vdots \\ b_{m+1,M} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_{m1} \\ b_{m2} \\ \vdots \\ b_{mM} \end{pmatrix}_y \quad 2\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_M \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{m1} \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{mM} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{m1} \\ b_{m2} \\ \vdots \\ b_{mM} \end{pmatrix}_x,$$

$$2\begin{pmatrix} c_{m+1,1} \\ c_{m+1,2} \\ \vdots \\ c_{m+1,M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{m1} \\ c_{m2} \\ \vdots \\ c_{mM} \end{pmatrix}_y - 2\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_M \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{m1} \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{mM} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_{m1} \\ c_{m2} \\ \vdots \\ c_{mM} \end{pmatrix}_x,$$

$$\begin{pmatrix} b_{01} \\ b_{02} \\ \vdots \\ b_{0M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{01} \\ c_{02} \\ \vdots \\ c_{0M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, a_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_M \end{pmatrix}, a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b_1=-\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_M\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_M\end{pmatrix},c_1=-\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_M\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\\ \vdots\\ r_M\end{pmatrix}\tag{5.212}$$

记

$$\begin{cases}V_+^{(n)}=\sum\limits_{m=0}^{n}(a_m,b_m,c_m)\lambda^{2n-2m}\\ V_-^{(n)}=\lambda^{2n}\quad V_+^{(n)}\end{cases}$$

直接计算得

$$V_{+y}^{(n)}+V_{+x}^{(n)}+[U,V_+^{(n)}]-(0,-2b_{n+1},2c_{n+1})$$

令 $V^{(n)}=V_+^{(n)}$, 解零曲率方程

$$U_t-U_x-V_y^{(n)}+[U,V^{(n)}]+V_x^{(n)}=0$$

得到 (2+1) 维的多分量可积系

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_M\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}b_{n+1,1}\\ b_{n+1,2}\\ \vdots\\ b_{n+1,M}\end{pmatrix}\\ \dfrac{\partial}{\partial w}\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\\ \vdots\\ r_M\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}c_{n+1,1}\\ c_{n+1,2}\\ \vdots\\ c_{n+1,M}\end{pmatrix}\end{cases}\tag{5.213}$$

我们考虑 (5.213) 式的约化情况. 例如, 在 (5.213) 式中令 $n=2$ 得到

(2+1) 维的多分量的耦合演化方程

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_M\end{pmatrix}_t=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_M\end{pmatrix}*\left[2\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_M\end{pmatrix}_{xy}-\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_M\end{pmatrix}_{xx}-\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_M\end{pmatrix}_{yy}\right]\\ \qquad+\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_M\end{pmatrix}_x+\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_M\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_M\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_M\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_M\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_M\end{pmatrix}_t=-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_M\end{pmatrix}*\left[2\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_M\end{pmatrix}_{xy}\quad\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_M\end{pmatrix}_{xx}-\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_M\end{pmatrix}_{yy}\right]\\ \qquad+\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_M\end{pmatrix}_x-\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_M\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_M\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_M\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\\vdots\\r_M\end{pmatrix}\end{cases}\tag{5.214}$$

## 5.10 一个 Lie 代数的子代数及其相关的两类 loop 代数

由于利用屠格式获得可积系统时, 首先要使静态零曲率方程 $V_x=[U,V]$ 必须有解, 且该解要用循环算子来表出. 这就要求 $U$ 中的谱参数 $\lambda$ 的次数不能过高或过低, 这无疑限制了等谱问题的建立. 郭福奎教授提出了一个解决途径, 即寻找 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 的子代数, 使其相邻基元中 $\lambda$ 的次数差大于 1. 基于如此, 构造了三类便于记忆的 $\lambda$ 次数差为 2 的 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 的子代数, 选择其中一个子代数利用屠格

式获得了一类可积 Hamilton 方程族. 本节利用此思想, 构造了 Lie 代数 $A_2$ 的一个子代数 $\dot{A}_2$, 适当选取谱参数 $\lambda$ 的次数差为 2 的阶数, 得到了一个 loop 代数. 其实是 loop 代数 $\tilde{A}_2$ 的一个子代数, 记之是 $\bar{A}_2$, 利用 $\bar{A}_2$ 设计了一个等谱问题. 利用屠格式得到了一个新的 Liouville 可积 Hamilton 结构. 作为其约化情形, 得到了一类非线性有理分式型演化方程. 并将 Lie 代数 $A_{n-1}=sl(n,C)$ 作直接推广, 得到新的 Lie 代数 $A_{n-1}^*=gl(n,C)$. 为应用方便, 本节只考虑 $A_2^*$ 情形, 即构造了 $A_2^*$ 的一个子代数. 通过基元阶数的适当选取, 得到一个 loop 代数 $\tilde{A}_2^*$, 利用 $\tilde{A}_2^*$ 构造了一个等谱问题. 由屠格式获得了另一类新的可积系, 也具有双 Hamilton 结构, 且是 Liouville 可积的. 作为其约化情形, 得到了 AKNS 型的可积系和一类广义耦合 Schrödinger 方程.

### 5.10.1 Lie 代数 $A_2$ 的一个子代数及其相应可积系

考虑一组 3×3 矩阵

$$
\begin{cases}
e_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\
e_4=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, [e_1,e_2]=-2e_4, [e_1,e_3]=0\\
[e_1,e_4]=-2e_2, [e_2,e_3]=e_4, [e_2,e_4]=2e_1, [e_3,e_4]=-e_2
\end{cases}
\tag{5.215}
$$

记

$$a=\sum_{i=1}^4 a_ie_i, b=\sum_{i=1}^4 b_ie_i, c=\sum_{i=1}^4 c_ie_i$$

其中 $a_i, b_i, c_i (i=1,2,3,4)$ 为常数或函数. 则

$$[[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b]=0$$

即 Jacobi 恒等式成立. 因此矩阵 (5.215) 构成了 Lie 代数 $A_2$ 的一个子代数, 记为 $\dot{A}_2$.

令 $e_1(n)=e_1\otimes\lambda^{2n-1}\equiv e_1\lambda^{2n-1}, e_2(n)=e_2\lambda^{2n-1}, e_3(n)=$

$e_3\lambda^{2n-1}, e_4(n) = e_4\lambda^{2n}$, 则有

$$\begin{cases} [e_1(m), e_2(n)] = -2e_4(m+n-1), [e_1(m), e_4(n)] = -2e_2(m+n) \\ [e_2(m), e_3(n)] = e_4(m+n-1), [e_2(m), e_4(n)] = 2e_1(m+n) \\ [e_3(m), e_4(n)] = -e_2(m+n), [e_1(m), e_3(n)] = 0 \\ \deg e_1(n) = \deg e_2(n) = \deg e_3(n) = 2n-1, \deg e_4(n) = 2n \end{cases} \tag{5.216}$$

于是 (5.216) 式为 loop 代数 $\tilde{A}_2$ 的一个子代数, 记为 $A_2$. 利用 $\tilde{A}_2$, 设计等谱问题

$$\varphi_x = U\varphi, \lambda_t = 0, U = \begin{pmatrix} \lambda + \dfrac{q}{\lambda} & 0 & \dfrac{r}{\lambda} - s \\ 0 & \lambda & 0 \\ \dfrac{r}{\lambda} + s & 0 & -\dfrac{q}{\lambda} \end{pmatrix} \tag{5.217}$$

令

$$V = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{\lambda} & 0 & \dfrac{b}{\lambda} - c \\ 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{b}{\lambda} + c & 0 & -\dfrac{a}{\lambda} \end{pmatrix}$$

其中

$$a = \sum_{m\geq 0} a_m\lambda^{-2m}, b = \sum_{m\geq 0} b_m\lambda^{-2m}, c = \sum_{m\geq 0} c_m\lambda^{-2m}$$

解静态零曲率方程

$$V_x = [U, V] \tag{5.218}$$

得递推关系

$$\begin{cases} b_{m+1} = b_{mxx} + 2(qc_m)_x - 2(sa_m)_x - 2qb_m + 2ra_m \\ c_{m+1} = -b_{mx} - 2qc_m + 2sa_m, a_{mx} = 2rc_m - 2sb_m \\ b_0 = c_0 = 0, a_0 = \alpha = \text{ const.}, a_1 = 2\alpha s^2, b_1 = -2\alpha s_x + 2\alpha r \\ c_1 = 2\alpha s, a_2 = 4\alpha(rs_x - r_x s) - 2\alpha r^2 + 4\alpha ss_x - 2\alpha s_x^2 \\ \quad -8\alpha qs^2 + 6\alpha s^4, b_2 = -2\alpha s_{xxx} + 2\alpha r_{xx} + 4\alpha(qs)_x \\ \quad -4\alpha(s^3)_x + 4\alpha qs_x - 4\alpha qr + 4\alpha s^2 r \\ c_2 = 2\alpha s_{xx} - 2\alpha r_x - 4\alpha qs + 4\alpha s^3, \cdots \end{cases} \tag{5.219}$$

记

$$V_+^{(n)} = \sum\nolimits_{m-0}^{n} (a_m e_1(n-m) + b_m e_2(n-m) + c_m e_4(n-m))$$

$$V_-^{(n)} = \lambda^{2n} V - V_+^{(n)}$$

则 (5.218) 式可写为

$$-V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = V_{-x}^{(n)} - [U, V_-^{(n)}] \tag{5.220}$$

易验证 (5.220) 式左端基元阶数 (deg) $\geq -2$, 右端基元阶数 $\leq -1$. 因此 (5.220) 式左、右两端基元阶数为 $-2, -1$, 于是

$$-V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] - c_{n+1}e_2(0) + (c_{n+1x} + b_{n+1})e_4(-1)$$

记

$$V^{(n)} = V_+^{(n)} + \Delta n$$

取修正项

$$\Delta n = (-b_n + \frac{r}{q} a_n) e_2(0)$$

则零曲率方程

$$U_t - V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] = 0 \tag{5.221}$$

确定 Lax 可积系

$$
\begin{aligned}
u_{t_n} = \begin{pmatrix} q \\ r \\ s \end{pmatrix}_{t_n} &= \begin{pmatrix} 2s(-b_n + \frac{r}{q}a_n) \\ (-b_n + \frac{r}{q}a_n)_x - c_{n+1} \\ -b_n + \frac{r}{q}a_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{nx} + \frac{r}{q}(b_{nx} + c_{n+1}) \\ (-b_n + \frac{r}{q}a_n)_x - c_{n+1} \\ -b_n + \frac{r}{q}a_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{2} & \frac{r}{2q}\partial & -\frac{r}{2q} \\ \partial\frac{r}{2q} & -\frac{\partial}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{r}{2q} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a_n \\ 2b_n \\ -2c_{n+1} \end{pmatrix} = JG_n
\end{aligned}
\tag{5.222}
$$

这里 $J$ 是一个辛算子. 由 (5.219) 知

$$
G_n = LG_{n-1}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
L &= \begin{pmatrix} A & B & 2\partial^{-1}r \\ \partial\frac{q}{r}\partial - 2\partial s + 2r & \partial^2 + 2\partial\frac{qs}{r} - 2q & 0 \\ 2\partial^2 s - \partial^2\frac{q}{r}\partial - 2\partial r & -\partial^2 - 2\partial^2 s + 2\partial q & -2q \end{pmatrix} \\
A &= 4\partial^{-1}s\partial - 4\partial^{-1}sr - 2\partial^{-1}\frac{qs}{r}\partial \\
B &= -2\partial^{-1}s\partial^2 - 4\partial^{-1}\frac{qs^2}{r} + 4\partial^{-1}qs
\end{aligned}
$$

所以,(5.222) 式可写为

$$
u_{t_n} = \begin{pmatrix} q \\ r \\ s \end{pmatrix}_{t_n} = JL^n \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -4\alpha s \end{pmatrix}
\tag{5.223}
$$

取 $n=1$, 则 (5.223) 式约化为一个非线性演化方程

$$\begin{cases} q_{t_1} = \alpha\left(-4ss_x + 4sr + \dfrac{4rs^3}{q}\right) \\ r_{t_1} = \alpha\left(2\left(\dfrac{rs^2}{q}\right)_x + 4qs - 4s^3\right) \\ s_{t_1} = \alpha\left(2s_x - 2r + \dfrac{2rs^2}{q}\right) \end{cases}$$

直接计算知

$$\left\langle V, \frac{\partial U}{\partial q}\right\rangle = tr\left(V\frac{\partial U}{\partial q}\right) = \frac{2a}{\lambda^2}, \left\langle V, \frac{\partial U}{\partial r}\right\rangle = \frac{2b}{\lambda^2}$$

$$\left\langle V, \frac{\partial U}{\partial s}\right\rangle = -2c, \left\langle V, \frac{\partial U}{\partial \lambda}\right\rangle = \frac{a}{\lambda} - \frac{2rb}{\lambda^3}$$

将其代入迹恒等式, 得

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{a}{\lambda} - \frac{2rb}{\lambda^3}\right) = \lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial \lambda}\lambda^{\gamma}\begin{pmatrix} \dfrac{2a}{\lambda^2} \\ \dfrac{2b}{\lambda^2} \\ -2c \end{pmatrix} \tag{5.224}$$

比较 $\lambda^{-2n-3}$ 的系数, 有

$$\frac{\delta}{\delta u}(a_{n+1} - 2rb_n) = (-2n-2+\gamma)G_n \tag{5.225}$$

将 (5.220) 式中的初值代入 (5.225) 式知 $\gamma = 1$. 因此

$$\frac{\delta H_n}{\delta u} = G_n$$

其中 $H_n = \dfrac{2rb_n - a_{n+1}}{2n+1}$ 为 Hamilton 函数, 于是得到 (5.223) 式的 Hamilton 结构

$$u_{t_n} = J\frac{\delta H_n}{\delta u} = K\frac{\delta H_{n-1}}{\delta u} \tag{5.226}$$

其中 $K = JL$, 可验证算子 $\tilde{J} = aJ + bK$ 是一个辛算子 (这里 $a, b$ 为实数或复数). 因此 $\{J, K\}$ 是一个算子对,(5.226) 式是 (5.223) 式的双 Hamilton 结构.

易验证 $JL = L^*J$. 于是 (5.223) 式是一个 Liouville 可积的双 Hamilton 方程族.

### 5.10.2 方程族的一类扩展可积模型

我们先构造 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 的一组基元, 然后再作恰当的代数变换, 构造出一个高维 Loop 代数 $\tilde{G}$.

取 Lie 代数 $A_1$ 的一个基为

$$\begin{cases} \tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{e}_3 = \tilde{e}_1, \tilde{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ [\tilde{e}_1, \tilde{e}_2] = 2\tilde{e}_4, [\tilde{e}_1, \tilde{e}_4] = 2\tilde{e}_2, [\tilde{e}_2, \tilde{e}_3] = -2\tilde{e}_4 \\ [\tilde{e}_2, \tilde{e}_4] = -2\tilde{e}_1, [\tilde{e}_1, \tilde{e}_3] = 0 \end{cases} \tag{5.227}$$

注: 这里之所以取 $\tilde{e}_3 = \tilde{e}_1$, 是为了与 Lie 代数 (5.215) 对应.

下面构造 Lie 代数 $A_1$ 的一个子代数 $\dot{A}_1$, 使其基元间的换位运算与矩阵 (5.215) 的相同.

设 $\dot{A}_1$ 的基元为 $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$, 且其换位运算为

$$[e_1, e_2] = -2\bar{e}_4, [\bar{e}_1, \bar{e}_3] = 0, [e_1, \bar{e}_4] = -2\bar{e}_2, [e_2, e_3] = \bar{e}_4$$

$$[e_2, e_4] = 2\bar{e}_1, [\bar{e}_3, \bar{e}_4] = -\bar{e}_2$$

作矩阵变换 $\bar{e}_i = \alpha_i \tilde{e}_i, \alpha_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为待定常数. 由 $[\bar{e}_1, e_2] = -2\bar{e}_4$ 知

$$[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2] = -\frac{2\alpha_4}{\alpha_1 \alpha_2} \tilde{e}_4$$

而由 (5.227) 式的第一个换位运算关系知

$$\frac{2\alpha_4}{\alpha_1 \alpha_2} = 2$$

类似地, 有

$$-\frac{2\alpha_2}{\alpha_1 \alpha_4} = 2, \frac{\alpha_4}{\alpha_2 \alpha_3} = -2, \frac{2\alpha_1}{\alpha_2 \alpha_4} = -2, -\frac{\alpha_2}{\alpha_3 \alpha_4} = 2 \tag{5.228}$$

解方程组 (5.228) 得一组解 $\alpha_1=-1,\alpha_2=\alpha_4=1,\alpha_3=-\frac{1}{2}$. 由此得到 Lie 代数 $\dot{A}_1$ 对应的一个 loop 子代数 $\bar{A}_1$,

$$\begin{cases}\bar{e}_1=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\bar{e}_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ e_4=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},[\bar{e}_1,e_2]=-2e_4,[\bar{e}_1,e_3]=0,[\bar{e}_3,\bar{e}_4]=-\bar{e}_2\\ [\bar{e}_1,\bar{e}_4]=-2e_2,[e_2,e_3]=\bar{e}_4,[\bar{e}_2,\bar{e}_4]=-2e_1,e_1(n)=\bar{e}_1\lambda^{2n-1}\\ e_2(n)=\bar{e}_2\lambda^{2n-1},\bar{e}_3(n)=\bar{e}_3\lambda^{2n-1},\bar{e}_4(n)=\bar{e}_4\lambda^{2n}\end{cases}\tag{5.229}$$

可见, 子代数 $\bar{A}_1$ 与子代数 $\bar{A}_2$ 有相同的换位关系, 只是对应的矩阵不同. 因此, 利用 (5.229) 式也导出可积系 (5.223) 式. 为方便起见, 将 (5.229) 式中的基元中的" - "去掉. 显然 (5.229) 式与下列的 Lie 代数 $A_2$ 的一个子代数具有相同换位运算,

$$\begin{cases}e_1=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ e_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{cases}\tag{5.230}$$

现将 (5.230) 式扩展为一个高维的 loop 代数 $\tilde{G}$:

$$
\begin{cases}
e_1 = \begin{pmatrix} -\lambda^{2n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{2n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{2n-1} & 0 \\ \lambda^{2n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
e_3 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -\lambda^{2n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{2n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{2n} & 0 \\ -\lambda^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^{2n} \\ 0 & 0 & \lambda^{2n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^{2n+1} \\ 0 & 0 & -\lambda^{2n} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
e_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^{2n} \\ 0 & 0 & \lambda^{2n+1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^{2n-1} \\ 0 & 0 & -\lambda^{2n} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{cases}
\tag{5.231}
$$

其换位运算为

$$
\begin{cases}
[e_1(m), e_2(n)] = -2e_4(m+n-1), [e_1(m), e_4(n)] = -2e_2(m+n) \\
[e_2(m), e_3(n)] = e_4(m+n-1), [e_6(m), e_7(n)] = [e_7(m), e_8(n)] = 0 \\
[e_2(m), e_4(n)] = 2e_1(m+n), [e_3(m), e_4(n)] = -e_2(m+n) \\
[e_1(m), e_3(n)] = 0, [e_1(m), e_5(n)] = -e_6(m+n-1) \\
[e_2(m), e_5(n)] = e_7(m+n-1), [e_3(m), e_5(n)] = -\dfrac{1}{2}e_6(m+n-1) \\
[e_4(m), e_5(n)] = e_8(m+n), [e_1(m), e_6(n)] = -e_5(m+n) \\
[e_2(m), e_6(n)] = -e_8(m+n), [e_3(m), e_6(n)] = -\dfrac{1}{2}e_5(m+n) \\
[e_4(m), e_6(n)] = -e_7(m+n), [e_5(m), e_6(n)] = 0 \\
[e_1(m), e_7(n)] = -e_8(m+n), [e_2(m), e_7(n)] = e_5(m+n) \\
[e_3(m), e_7(n)] = -\dfrac{1}{2}e_8(m+n), [e_4(m), e_7(n)] = e_6(m+n) \\
[e_5(m), e_7(n)] = 0, [e_1(m), e_8(n)] = -e_7(m+n-1) \\
[e_2(m), e_8(n)] = -e_6(m+n-1), [e_3(m), e_8(n)] = -\dfrac{1}{2}e_7(m+n-1) \\
[e_4(m), e_8(n)] = -e_5(m+n), [e_5(m), e_8(n)] = [e_6(m), e_8(n)] = 0
\end{cases}
$$

定义 $\deg e_1(n) = \deg e_2(n) = \deg e_3(n) = \deg e_6(n) = \deg e_7(n) = 2n-1, \deg e_4(n) = \deg e_5(n) = \deg e_8(n) = 2n$.

考虑等谱问题

$$\begin{cases} \Psi_x = U\Psi, \lambda_t = 0, U = e_3(1) + u_1e_1(0) + u_2e_2(0) \\ \quad +u_3e_4(0) + u_4e_5(0) + u_5e_6(0) + u_6e_7(0) + u_7e_8(0) \end{cases} \tag{5.232}$$

设

$$\begin{aligned} V = \textstyle\sum_{m\geq 0} \big(&a_me_1(-m) + b_me_2(-m) + c_me_4(-m) + d_me_5(-m) \\ &+f_me_6(-m) + g_me_7(-m) + h_me_8(-m)\big) \end{aligned}$$

解零曲率方程得递推关系

$$\begin{cases} a_{mx} = 2u_2c_m - 2u_3b_m, b_{mx} = -c_{m+1} - 2u_1c_m + 2u_3a_m, \\ c_{m+1x} = -b_{m+1} - 2u_1b_m + 2u_2a_m \\ d_{mx} = -\frac{1}{2}f_{m+1} - u_1f_m + u_2g_m - u_3h_m + u_5a_m - u_6h_m + u_7c_m \\ f_{m+1x} = -\dfrac{1}{2}d_{m+1} - u_1d_m - u_2h_m + u_3g_{m+1} + u_4a_m - u_6c_{m+1} \\ \qquad +u_7b_m \\ g_{m+1x} = -\dfrac{1}{2}h_{m+1} - u_1h_m + u_2d_m - u_3f_{m+1} - u_4b_m + u_5c_{m+1} \\ \qquad +u_7a_m \\ h_{mx} = -\dfrac{1}{2}g_{m+1} - u_1g_m - u_2f_m + u_3d_m - u_4c_m + u_6a_m + u_5b_m \\ a_0 = a, b_0 = c_0 = d_0 = f_0 = h_0 = 0, a_1 = 2au_3^2, b_1 = -2au_{3x} + 2au_2 \\ c_1 = 2au_3, g_1 = 2au_6, f_1 = 2au_5, d_1 = -4au_{5x} + 4au_3u_6 + 2au_4 \\ h_1 = -4au_{6x} - 4au_3u_5 + 2au_7 \end{cases} \tag{5.233}$$

直接计算知

$$\begin{aligned} -V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = &(c_{n+1x} + b_{n+1})e_4(-1) + [d_{n+1x} + \frac{1}{2}f_{n+2} \\ &+u_1f_{n+1} - u_2g_{n+1} + u_3h_{n+1} - u_5a_{n+1} + u_6b_{n+1} \\ &-u_7c_{n+1}]e_5(-1) + [h_{n+1x} + \frac{1}{2}g_{n+2} + u_1g_{n+1} + u_2f_{n+1} \\ &-u_3d_{n+1} + u_4c_{n+1} - u_5b_{n+1} - u_6a_{n+1}]e_8(-1) + c_{n+1}e_2(0) \end{aligned}$$

设 $\tilde{\Delta}_n = k_1e_2(0) + k_2e_5(0) + k_3e_8(0)$, 其中 $k_1, k_2, k_3$ 为待定函数. 解方程组

$$\begin{cases} c_{n+1x} + b_{n+1} - 2u_1k_1 = 0 \\ -u_1k_3 + u_2k_2 - u_4k_1 = 0 \\ -u_1k_2 - u_2k_3 + u_7k_1 = 0 \end{cases}$$

得

$$\begin{aligned} k_1 &= -b_n + \frac{u_2}{u_1}a_n, \ k_2 = \left(-\frac{u_7}{u_1} + \frac{u_2(u_2u_7 - u_1u_4)}{u_3(u_1^2 + u_2^2)}\right)b_n \\ &\quad + \left(\frac{u_2u_7}{u_1^2} - \frac{u_2^2(u_2u_7 - u_1u_4)}{u_1u_3(u_1^2 + u_2^2)}\right)a_n \\ k_3 &= \frac{u_2u_7 - u_1u_4}{u_1^2 + u_2^2}\left(-b_n + \frac{u_2}{u_1}a_n\right) \equiv F\left(-b_n + \frac{u_2}{u_1}a_n\right) \end{aligned}$$

其中

$$F = \frac{u_2u_7 - u_1u_4}{u_1^2 + u_2^2}$$

令

$$V^{(n)} = V_+^{(n)} + \tilde{\Delta}_n$$

由零曲率方程, 得 Lax 可积系

$$
u_{t_n}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\\u_5\\u_6\\u_7\end{pmatrix}_{t_n}=\begin{pmatrix}2u_3\left(-b_n+\dfrac{u_2}{u_1}a_n\right)\\ \left(-b_n+\dfrac{u_2}{u_1}a_n\right)_x-c_{n+1}\\ -b_n+\dfrac{u_2}{u_1}a_n\\ A_1\\ B_1\\ \dfrac{F}{2}\left(-b_n+\dfrac{u_2}{u_1}a_n\right)\\ C_1\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{2} & \dfrac{u_2}{2u_1}\partial & -\dfrac{u_2}{2u_1} & 0\ 0\ 0\ 0\\ \partial\dfrac{u_2}{2u_1} & -\dfrac{\partial}{2} & \dfrac{1}{2} & 0\ 0\ 0\ 0\\ \dfrac{u_2}{2u_1} & -\dfrac{1}{2} & 0 & 0\ 0\ 0\ 0\\ E_1 & F_1 & 0 & 0\ 0\ 0\ 0\\ \dfrac{u_2u_7}{4u_1^2}-\dfrac{u_2^2}{4u_1u_3}F & \dfrac{u_2F}{4u_3}-\dfrac{u_7}{4u_1} & 0 & 0\ 0\ 0\ 0\\ \dfrac{u_2F}{4u_1} & -\dfrac{F}{4} & 0 & 0\ 0\ 0\ 0\\ G_1 & H_1 & 0 & 0\ 0\ 0\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2a_n\\2b_n\\-2c_{n+1}\\f_{n+1}\\d_{n+1}\\g_{n+1}\\h_{n+1}\end{pmatrix}
$$

$$
=J\tilde{G}_n \tag{5.234}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
A_1=&\left(\left(\frac{u_2}{u_3}F-\frac{u_7}{u_1}\right)b_n\right)_x+\left(\left(\frac{u_2u_7}{u_1^2}-\frac{u_2^2}{u_1u_3}\right)a_n\right)_x\\
&+u_6\left(-b_n+\frac{u_2}{u_1}a_n\right)+u_3F\left(-b_n+\frac{u_2}{u_1}a_n\right)\\
B_1=&\left(\frac{u_2}{2u_3}F-\frac{u_7}{2u_1}\right)b_n+\left(\frac{u_2u_7}{2u_1^2}-\frac{u_2^2F}{2u_1u_3}\right)a_n\\
C_1=&\left(F\left(-b_n+\frac{u_2}{u_1}a_n\right)\right)_x+\left(\frac{u_2u_3u_7}{u_1^2}\frac{u_2^2}{u_1}F\right)a_n
\end{aligned}
$$

$$+\left(\frac{-u_3u_7}{u_1}+u_2F\right)b_n$$

$$E_1=\frac{u_2u_3F}{2u_1}+\frac{u_2u_6}{2u_1}+\frac{\partial}{2}\left(\frac{u_2u_7}{u_1^2}-\frac{u_2^2}{u_1u_3}F\right)$$

$$F_1=\frac{\partial}{2}\left(\frac{u_2}{u_3}F-\frac{u_7}{u_1}\right)-\frac{u_6}{2}-\frac{u_3}{2}F$$

$$G_1=\frac{1}{2}\left(\frac{u_2u_3u_7}{u_1^2}+\frac{u_2^2}{u_1}F+\partial\frac{u_2}{u_1}F\right)$$

$$H_1=\frac{u_2}{2}F-\frac{u_3u_7}{2u_1}-\frac{\partial}{2}F$$

由 (5.233) 式知

$$\begin{aligned}
f_{n+1}=&-2d_{nx}-2u_1f_n+2u_2g_n-2u_3d_n+2u_7c_n\\
&+(2u_5B-2u_6D)a_{n-1}+(2u_5A-2u_6C)b_{n-1}\\
g_{n+1}=&-2h_{nx}-2u_1g_n-2u_2f_n+2u_3d_n-2u_4c_n\\
&+(2u_6B+2u_5D)a_{n-1}+(2u_6A+2u_5C)b_{n-1}\\
d_{n+1}=&(4\partial^2-2u_1+4u_3^2)d_n+(4\partial u_1-4u_2u_3)f_n-(4\partial u_2+4u_1u_3)g_n\\
&+(4\partial u_3-2u_2)h_n+(-4\partial u_7-2u_4+4u_4\partial^{-1}u_2+4u_1u_6)c_n\\
&+[\partial(4u_6C-4u_5A)+4u_3u_6A+4u_3u_5C+2u_4A-2u_6H\\
&+2u_7C]b_{n-1}+[\partial(4u_6D-4u_5B)+4u_3u_6B+4u_3u_5D+2u_4B\\
&+2u_6E+2u_7D]a_{n-1}\\
h_{n+1}=&(4\partial^2-2u_1+4u_3)h_n+(4\partial u_1-4u_2u_3)g_n+4\partial u_2f_n\\
&+(4u_3\partial-4u_2+4\partial u_3)d_n+(4\partial u_2-4u_3u_7-4u_1u_5+4u_7\partial^{-1}u_2)g_n\\
&+[-2\partial(2u_6A+2u_5C)-4u_3u_5A+4u_3u_6C-2u_4C+2u_5H\\
&+2u_7A]b_{n-1}+[\partial(2u_6B+2u_5D)-4u_3u_5B+4u_3u_6D-2u_4D\\
&+2u_5E+2u_7B]a_{n-1}
\end{aligned}$$

其中

$$A=-2\partial^{-1}u_3\partial^2-4\partial^{-1}\frac{u_3^2u_1}{u_2}+4\partial^{-1}u_1u_3$$

$$B=4\partial^{-1}u_3\partial-4\partial^{-1}u_3u_2-2\partial^{-1}\frac{u_1u_3}{u_2}\partial$$

$$C=\partial^2+2\partial\frac{u_1u_3}{u_2}-2u_1.\ D=\partial\frac{u_1}{u_2}\partial-2\partial u_3+2u_2$$

$$E=2\partial^2u_3-\partial^2\frac{u_1}{u_2}\partial-2\partial u_2,\ H=-\partial^2-2\partial^2u_3+2\partial u_1$$

于是 $\check{G}_n = L\check{G}_{n-1}$，其中

$$
L = \begin{pmatrix}
B & A & 2\partial^{-1}u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
D & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
E & H & -2u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
P_1 & P_2 & 2u_7 & -2u_1 & 2\partial & 2u_2 & -2u_3 \\
M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 & M_7 \\
Q_1 & Q_2 & 2u_7 & -2u_1 & -2\partial & 2u_2 & -2u_3 \\
N_1 & N_2 & N_3 & 4\partial u_2 & N_4 & N_5 & N_6 \\
 & & & & & &
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_1 = u_5B - u_6D, P_2 = u_5A - u_6C, Q_1 = 2u_6B + 2u_5D \\
&Q_2 = 2u_5A - 2u_6C, M_1 = \partial(4u_6D - 4u_5B) + 4u_3u_6B \\
&\quad +4u_3u_5D + 2u_4B - 2u_6E + 2u_7D \\
&M_2 = \partial(4u_6C - 4u_5A) + 4u_3u_6A + 4u_3u_5C + 2u_4A \\
&\quad -2u_6H + 2u_7C, M_3 = -4\partial u_7 - 2u_4 + 4u_4\partial^{-1}u_2 + 4u_1u_6 \\
&M_4 = 4\partial u_1 - 4u_2u_3, M_5 = 4\partial^2 - 2u_1 + 4u_3^2 \\
&M_6 = -4\partial u_2 - 4u_1u_3, M_7 = 4\partial u_3 - 2u_2 \\
&N_1 = \partial(2u_6B + 2u_5C) - 2u_3(2u_5B - 2u_6D) - 2u_4D \\
&\quad +2u_5E + 2u_7B, N_2 = -2\partial(2u_6A + 2u_5C) \\
&\quad -2u_3(2u_5A - 2u_6C) - 2u_4C + 2u_5H + 2u_7A \\
&N_3 = 4\partial u_2 - 4u_3u_7 - 4u_1u_5 + 4u_7\partial^{-1}u_2 \\
&N_4 = 4u_3\partial - 4u_2 - 4\partial u_3 \\
&N_5 = 4\partial u_1 - 4u_2u_3, N_6 = 4\partial^2 - 2u_1 + 4u_3^2
\end{aligned}
$$

因此,(5.234) 式可写为

$$
u_{t_n} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix}_{t_n} = JL^n \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -4\alpha u_3 \\ 2\alpha u_5 \\ 4\alpha u_{5x} + 4\alpha u_3u_6 + 2\alpha u_4 \\ 2\alpha u_6 \\ -4\alpha u_{6x} - 4\alpha u_3u_5 + 2\alpha u_7 \end{pmatrix} \tag{5.235}
$$

比较 (5.235) 和 (5.222) 式 $J$ 与 $L$ 的结构, 根据可积耦合定义知,(5.235) 式即为 (5.222) 式的可积耦合, 也是 (5.222) 式的一类扩展可积模型.

### 5.10.3 Lie 代数 $A_2$ 的直接推广及其相应的一类可积系

与 Lie 代数 $A_2$ 的子代数 (5.215) 相关的 Lie 代数就是将矩阵 (5.215) 作直接推广而得到的代数.

我们知道, 对于 Lie 代数

$$A_{n-1}=sl(n,c)=\left\{z=(x_{ij})_{n\times n}|x_{ij}\in C,\mathrm{tr}z=0\right\}$$

其元素间的换位运算是

$$[z,y]=zy-yz,\forall z,y\in A_{n-1} \tag{5.236}$$

考虑一个 $n\times n$ 方阵集

$$A*_{n-1}=sl(n.C)=\{z=(x_{ij})_{n\times n}|x_{ij}\in C\}$$

定义运算

$$[Z,Y]=ZMY-YMZ,\forall Z,Y,M\in A_{n-1}^{*} \tag{5.237}$$

易验证 (5.237) 式满足:

(i) 反对称性: $[Z,Y]=-[Y,Z]$;

(ii) 双线性: $[aZ+bY,X]=a[Z,X]+b[Y,X],\forall Z,Y,X\in A_{n-1}^{*},a,b\in C$;

(iii) Jacobi 恒等式: $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$,

于是 $A_{n-1}^{*}$ 为一个 Lie 代数. 当 $M$ 取单位矩阵时, 运算关系 (5.237) 化为 (5.236) 式. 因此,Lie 代数 $A_{n-1}^{*}$ 是 Lie 代数 $A_{n-1}$ 的直接推广.

郭福奎教授曾经给定 $M_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, 并设计了 $A_1^{*}$ 的一组基, 以

一种新的表达方式给出了著名的 AKNS 方程族. 这里取

$$M_2=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\lambda} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{\lambda}\end{pmatrix}$$

构造 $A_2^*$ 的一组基, 由此设计一个等谱问题, 导出一族新的 Liouville 可积的 Hamilton 可积系.

考虑 Lie 代数 $A_2^*$ 的一个子代数

$$sl(3,c)=\left\{z=(x_{ij})_{3\times 3}\,|x_{ij}\in C\right\} \tag{5.238}$$

$$\begin{aligned}&e_1=\begin{pmatrix}0&0&\lambda\\0&0&0\\\lambda&0&0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&-\lambda&0\\0&0&0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0&0&-\lambda\\0&0&0\\\lambda&0&0\end{pmatrix}\\&e_4=\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&0&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{5.239}$$

在 (5.237) 式中, 取 $M=M_2$, 由 (5.239) 式知

$$\begin{aligned}&[e_1,e_2]=e_3,[e_1,e_3]=-2e_4,[e_1,e_4]=2e_3,[e_2,e_3]=-e_1\\&[e_2,e_4]=0,[e_3,e_4]=2e_1\end{aligned} \tag{5.240}$$

令

$$e_1(n)=e_1\lambda^{2n+1},e_2(n)=e_2\lambda^{2n},e_3(n)=e_3\lambda^{2n+1},e_4(n)=e_4\lambda^{2n} \tag{5.241}$$

根据 (5.239),(5.240) 式, 则有换位运算

$$\begin{cases}[e_1(m),e_2(n)]=e_3(m+n),[e_1(m),e_3(n)]=-2e_4(m+n+1)\\ [e_1(m),e_4(n)]=2e_3(m+n),[e_2(m),e_3(n)]=-e_1(m+n)\\ [e_3(m),e_4(n)]=2e_1(m+n),[e_2(m),e_4(n)]=0\\ \deg e_1(n)=\deg e_3(n)=2n+1,\deg e_2(n)=\deg e_4(n)=2n\end{cases}$$

$$(5.242)$$

从而 (5.241),(5.242) 式构成一个新的 loop 代数 $\tilde{A}_2^*$.

考虑 Lax 对

$$\begin{cases} \Psi_x = UM_2\Psi, \lambda_t = 0 \\ \Psi_t = VM_2\Psi, M_{2x} = M_{2t} = 0 \end{cases} \tag{5.243}$$

这里 $U$ 和 $V$ 由 (5.241) 和 (5.242) 式决定, 由 (2.243) 式相容性知

$$(U_t - V_x + UM_2V - VM_2U)M_2\Psi = 0$$

因为 $\Psi$ 是任意的, 所以有

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \tag{5.244}$$

即零曲率方程成立. 由 (5.243) 式通过适当的选取 $U$ 和 $V$, 利用屠格式有可能导出可积的 Hamilton 方程族. 事实上, 在 (5.243) 式中, 取

$$U = e_2(1) + qe_1(0) + re_3(0) + se_1(0) = \begin{pmatrix} \lambda^3 + s\lambda & 0 & (q-r)\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 & 0 \\ (q+r)\lambda^2 & 0 & s\lambda \end{pmatrix}$$

$$V = ae_1(0) + be_3(0) + ce_4(0) = \begin{pmatrix} c\lambda & 0 & (a-b)\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ (a+b)\lambda^2 & 0 & c\lambda \end{pmatrix}$$

其中 $a = \sum_{m\geq 0} a_m\lambda^{-2m}, b = \sum_{m>0} b_m\lambda^{-2m}, c = \sum_{m>0} c_m\lambda^{-2m}$

解静态零曲率方程

$$V_x = [U, V] \tag{5.245}$$

得递推关系

$$\begin{cases} b_{m+1} = -a_{mx} + 2rc_m - 2sb_m, a_{m+1} = -b_{mx} + 2qc_m - 2sa_m \\ c_{mx} = -2qb_{m+1} + 2ra_{m+1} = 2qa_{mx} - 2rb_{mx} + 4qsb_m - 4rsa_m \\ a_0 = b_0 = 0, c_0 = \alpha, a_1 = 2\alpha q, b_1 = 2\alpha r, c_1 = 2\alpha(q^2 - r^2) \\ a_2 = \alpha(2r_x + 4q(q^2 - r^2) - 4qs) \\ b_2 = \alpha(-2q_x + 4r(q^2 - r^2) - 4rs) \\ c_2 = \alpha(4rq_x - 4r_xq + 6(q^2 - r^2)^2 - 8(q^2 - r^2)s) \end{cases}$$

(5.246)

记

$$V_+^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} (a_m e_1(n-m) + b_m e_3(n-m) + c_m e_4(n-m))$$

$$V_-^{(n)} = \lambda^{2n} V - V_+^{(n)}$$

则 (5.245) 式可写为

$$-V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = V_{-x}^{(n)} - [U, V_-^{(n)}] \tag{5.247}$$

易知,(5.247) 式左端所含基元阶数 (deg)≥0, 而右端基元阶数 ≤1, 因此

$$-V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = a_{n+1}e_3(0) + b_{n+1}e_1(0) - (2ra_{n+1} - 2qb_{n+1})e_4(0)$$

令 $V^{(n)} = V_+^{(n)}$, 则由零曲率方程 $U_t - V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] = 0$ 确定可积系

$$u_{t_n} = \begin{pmatrix} q \\ r \\ s \end{pmatrix}_{t_n} = \begin{pmatrix} -b_{n+1} \\ -a_{n+1} \\ 2ra_{n+1} - 2qb_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{n+1} \\ -a_{n+1} \\ c_{nx} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a_{n+1} \\ -2b_{n+1} \\ 2c_n \end{pmatrix} = JG_n \tag{5.248}$$

其中 $J$ 是 Hamilton 算子. 根据 (5.246) 式知

$$G_n = LG_{n-1}$$

其中

$$L = \begin{pmatrix} -2s + 4q\partial^{-1}q\partial & -\partial - 4q\partial^{-1}r\partial & -4q\partial^{-1}s\partial \\ -\partial - 4r\partial^{-1}q\partial & -2s - 4r\partial^{-1}r\partial & -4r\partial^{-1}s\partial \\ -2\partial^{-1}q\partial & -2\partial^{-1}r\partial & -2\partial^{-1}s\partial \end{pmatrix}$$

因此

$$u_{tn}=\begin{pmatrix}q\\r\\s\end{pmatrix}_{tn}=JL^nG_0=JL^n\begin{pmatrix}4\alpha q\\-4\alpha r\\2\alpha\end{pmatrix} \tag{5.249}$$

取 $n=2$, 则 (5.249) 式约化为广义耦合 Schrödinger 方程

$$\begin{cases}q_{t_2}=-2\alpha r_{xx}+(4\alpha q_x+24\alpha sr)(q^2-r^2)+4\alpha q(q^2-r^2)_x\\ \quad -8\alpha q_x s-4\alpha q s_x-8\alpha r(rq_x-r_xq)-12\alpha r(q^2-r^2)^2-8\alpha s^2 r\\ r_{t_2}=-2\alpha q_{xx}+(4\alpha r_x+24\alpha sq)(q^2-r^2)+4\alpha r(q^2-r^2)_x\\ \quad -8\alpha r_x s-4\alpha r s_x-8\alpha q(rq_x-r_xq)-12\alpha q(q^2-r^2)^2-8\alpha s^2 q\\ s_{t_2}=4\alpha(rq_{xx}-r_{xx}q)+[24\alpha(q^2-r^2)-16\alpha s](qq_x-rr_x)\\ \quad -8\alpha s_x(q^2-r^2)\end{cases}$$

在 (5.249) 式中, 令 $s=0$, 得到 AKNS 形式的可积系

$$\tilde{u}_{t_n}=\tilde{J}\tilde{L}\tilde{G}_0$$

其中

$$\tilde{J}=\begin{pmatrix}0&\dfrac{1}{2}\\-\dfrac{1}{2}&0\end{pmatrix},\tilde{L}=\begin{pmatrix}4q\partial^{-1}q\partial&-4q\partial^{-1}r\partial\\-\partial-4r\partial^{-1}q\partial&4r\partial^{-1}r\partial\end{pmatrix}$$

直接计算知

$$\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial q}\right\rangle=2a\lambda^4,\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial r}\right\rangle=-2b\lambda^4,\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial s}\right\rangle=2c\lambda^2$$

$$\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right\rangle=(3c+4qa-4rb)\lambda^3+2sc\lambda$$

将其代入迹恒等式得

$$\frac{\delta}{\delta u}\left((3c+4qa-4rb)\lambda^3+2sc\lambda\right)-\lambda^{\gamma}\frac{\partial}{\partial\lambda}\lambda^{\gamma}\begin{pmatrix}2a\lambda^4\\2b\lambda^4\\2c\lambda^2\end{pmatrix} \tag{5.250}$$

在 (5.249) 式中, 比较 $\lambda^{2n+1}$ 的系数知

$$\frac{\delta}{\delta u}(2sc_n+3c_{n+1}+4qa_{n+1}-4rb_{n+1})=(-2n+2+\gamma)G_n \tag{5.251}$$

将 (5.246) 式的初值代入 (5.251) 式得 $\gamma = 12$, 于是有 $\dfrac{\delta H_n}{\delta u} = G_n$, 其中

$$H_n = \frac{2sc_n + 3c_{n+1} + 4qa_{n+1} - 4rb_{n+1}}{16 - 2n}$$

为 Hamilton 函数. 因此, 我们得到可积系统 (5.249) 的 Hamilton 结构

$$u_{t_n} = J\frac{\delta H_n}{\delta u} = K\frac{\delta H_{n-1}}{\delta u} \tag{5.252}$$

其中 $K = JL$.

可验证, 算子 $\tilde{J} = C_1 J + C_2 K$ 仍为辛算子, 因此 $\{J, K\}$ 为一个算子对. 从而 (5.252) 式是可积系统 (5.249) 的双 Hamilton 结构. 易发现 $JL = L^* J$, 其中 $L^*$ 是 $L$ 的伴随算子, 所以可积系统 (5.249) 是一个 Liouville 可积系.

# 第六章　孤立子系统的 Hamilton 结构

## 6.1　引言

有限维 Hamilton 系统理论中的 Liouville 定理表明：一个定义在某一区域 $\Omega \subseteq R^{2N}$ 的 $N$ 维 Hamilton 系统

$$p_{it} = \frac{\partial H}{\partial q_i},\ q_{it} = \frac{\partial H}{\partial p_i},\ i = 1, 2, \cdots, N \tag{6.1}$$

只要存在 $N$ 个在区域 $\Omega$ 上彼此对合的运动积分就是完全可积的，即解可用积分表示. 然而，对无限维的情形，即广义 Hamilton 方程情形，尽管已有许多进展，但建立象有限维 Hamilton 系统这样完美的几何理论还有一段漫长的路要走. 到目前为止，我们还没有完全了解无限维 Hamilton 系统完全可积的本质. 在本章中，我们采用两种特殊的可积性定义：Lax 可积性和 Liouville 可积性. 本节根据马文秀博士的工作 [130] 将有关孤子系统的 Hamilton 结构的概念和步骤重述.

设 $u = u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), \cdots, u_q(x,t))^T \quad (x, t \in R)$ 是 $q$ 维函数向量，并假定对任意固定的 $t \in R, u = u(x,t)$ 属于 $R$ 上的 $q$ 重 Schwartz 空间. 用 $\ddot{A}$ 表示全体光滑函数 $F(x, u^{(n)}) = F[u]$ 所构成的线性空间. 如果对 $F, G \in \ddot{A}$，存在 $H \in \ddot{A}$ 使得 $F - G = \partial H = \dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}$，则称 F 与 G 等价.

$F \in \ddot{A}$ 所属的等价类用

$$\widetilde{F} = \int F \mathrm{d}x \tag{6.2}$$

表示，每一等价类 $\widetilde{F} = \int F dx$ 被称为一个泛函并定义泛函的变分导数为

$$\frac{\delta \widetilde{F}}{\delta u} = \frac{\delta F}{\delta u} = \left(\frac{\delta F}{\delta u_1}, \frac{\delta F}{\delta u_2}, \cdots, \frac{\delta F}{\delta u_q}\right)^T \tag{6.3}$$

其中

$$\frac{\delta}{\delta u_i}=\sum_{j\geq 0}(-\partial)^j\frac{\partial}{\partial u_i^{(j)}}, u_i^{(j)}=\partial^j u_i, i=1,2,\cdots,q$$

由于 $\frac{\delta}{\delta u}\partial G=0, G\in \ddot{A}$ 定义式 (6.3) 是确切有意义的.

**定义 6.1.1** 设给定一般非线性偏微分方程

$$F(t,x,u)=0 \tag{6.4}$$

其中 $u$ 是 $t$ 与 $x$ 的未知函数, 而 $F(t,x,u)$ 是 $t,x,u$ 及 $u$ 的导数的函数. 若存在一对连续可微函数 $\omega(t.x,u)$ 和 $J(x.t,u)$ 使得当 $u$ 按方程 (6.4) 发展时满足关系式

$$\partial_t\omega(t,x.u)=\partial_x J(t,x.u) \tag{6.5}$$

则称此关系式为方程 (6.4) 的守恒律, 而 $\omega(t,x,u)$ 和 $J(x,t,u)$, 分别称为守恒密度与连带流. 如果当 $|x|$ 趋于无穷时, 密度与流充分快地趋于零, 则将守恒律在整个轴上对 $x$ 积分得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(t,x,u)\mathrm{d}x=0 \tag{6.6}$$

可见积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(t,x,u)dx$ 与时间 $t$ 无关而为方程 (6.4) 的守恒量, 这就是函数 $\omega(t,x,u)$ 称为守恒密度的由来. Miura 利用 Miura 变换已经证明了 KdV 方程有无穷个守恒律.KdV 方程前三个守恒律分别是

$$\begin{aligned}
&u_t=(u_{xx}+3u_2)_x\\
&(u^2)_t=(2uu_{xx}-u_x^2+4u^3)_x\\
&(\frac{1}{2}u_x^2-u^3)_t=(u_xu_{xxx}-\frac{1}{2}u_{xx}^2-3u^2u_{xx}+6uu_x^2-\frac{9}{2}u^4)_x=0
\end{aligned}$$

其中第一个守恒律表示动量守恒, 而第二个守恒律对应于能量守恒.

基于等谱问题的零曲率表示, 屠规彰建立了一个生成 Liouville 可积广义 Hamilton 方程族的代数格式, 把这一格式扩展到从等谱问题

$$\begin{cases}\varphi_x=U\varphi=U(u.\lambda)\varphi\\ \varphi_{tn}=V^{(n)}\varphi=V^{(n)}(u,\lambda)\varphi\end{cases}. \qquad n>-k,k\in Z \tag{6.7}$$

着手, 许多孤子方程族的确都是通过这一途径导出.

## 6.2 一族 Lax 可积发展方程及其 Hamilton 结构

利用扩展的屠格式考虑如下等谱特征值问题

$$\varphi_x = U(u,\lambda)\varphi = \begin{pmatrix} \alpha_1\lambda + q & r \\ \alpha_3 & \alpha_2\lambda + s \end{pmatrix}\varphi \tag{6.8}$$

这里 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是常数且 $\alpha_1 \neq \alpha_2, \alpha_3 \neq 0, u = (q, r, s)^T$.

我们将 (6.8) 中的矩阵 $U$ 改写如下

$$U = (\alpha_1\lambda + q)h_1 + (\alpha_2\lambda + s)h_2 + re + \alpha_3 f \tag{6.9}$$

其中

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

对 $h_1, h_2, e, f$, 有

$$\begin{cases} [h_1, e] = -[h_2, e] = e, [h_1, f] = -[h_2, f] = -f \\ [e, f] = h_1 - h_2, \langle h_1, h_1\rangle = \langle h_2, h_2\rangle = \langle e, f\rangle = 1 \end{cases} \tag{6.10}$$

其中 $\langle y, z\rangle = \mathrm{tr}(yz)$ 表示 Killing-Cartan 型. 令

$$V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = ah + be + cf, h = h_1 - h_2$$

求伴随方程 $V_x = [U, V]$ 的解, 得

$$\begin{cases} a_x = rc - \alpha_3 b \\ b_x = \alpha\lambda b + (q - s)b - 2ra, \alpha = \alpha_1 - \alpha_2 \\ c_x = -\alpha\lambda c - (q - s)c + 2\alpha_3 a \end{cases} \tag{6.11}$$

将 $a = \sum\limits_{n\geq 0} a_n\lambda^{-n}, b = \sum\limits_{n\geq 0} b_n\lambda^{-n}, c = \sum\limits_{n\geq 0} c_n\lambda^{-n}$, 代入 (6.11) 我们可

以得到

$$\begin{cases} b_0 = c_0 = 0, a_0 = \eta = \text{const.} \neq 0 \\ a_{nx} = rc_n - \alpha_3 b_n \\ b_{nx} = \alpha b_{n+1} + (q-s)b_n - 2ra_n \\ c_{nx} = -\alpha c_{n+1} - (q-s)c_n + 2\alpha_3 a_n \end{cases} \quad n \geq 0 \tag{6.12}$$

前面三个向量 $(b_n, c_n, a_n)(1 \leq n \leq 3)$ 为

$$\begin{cases} b_1 = 2\alpha^{-1}\eta r, c_1 = 2\alpha^{-1}\alpha_3\eta, a_1 = 0 \\ b_2 = 2\alpha^{-2}\eta\left[r_x - (q-s)r\right], c_2 = -2\alpha^{-2}\alpha_3\eta(q-s) \\ a_2 = -2\alpha^{-2}\alpha_3\eta r; b_3 = 2\alpha^{-3}\eta[r_{xx} + 2(q-s)r_x + (q_x - s_x)r \\ \quad +r(q^2+s^2) - 2(qs + \alpha_3 r)r], a_3 = 2\alpha^{-3}\alpha_3\eta\left[-r_x + 2(q-s)r\right] \\ c_3 = 2\alpha^{-3}\alpha_3\eta\left[(q_x - s_x) + (q^2+s^2) - 2(qs + a_3 r)\right] \end{cases} \tag{6.13}$$

为方便起见，当 $g = g(\lambda)$ 时记 $g' = g(\mu)$，而当 $g = \sum\limits_{n>0} g_n\lambda^n$ 时记 $g_+ = \sum\limits_{n\geq 0} g_n\lambda^n$. 通过 (6.9) 和 (6.8)，有下列关系式

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\mu(U(\lambda) - U(\mu))}{(\lambda - \mu)}, V(\mu)\right] = \left[\mu(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2), a'h + b'e + c'f\right] \\ &\quad = [\mu(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2), b'e + c'f] = \alpha\mu b'e - \alpha\mu c'f \end{aligned}$$

选取

$$\Delta(\lambda) = \sum_{n\geq -1} \Delta_n \lambda^{-n} = \delta_1 h_1 + \delta_2 h_2 = \delta_1(\lambda)h_1 + \delta_2(\lambda)h_2, (k-1)$$

则

$$\Delta_x(\mu) - [U(\lambda), \Delta(\mu)] = \delta'_{1x}h_1 + \delta'_{2x}h_2 + (\delta'_1 - \delta'_2)re - \alpha_3(\delta'_1 - \delta'_2)f$$

为得到 Lax 可积方程，我们需要条件

$$\alpha_3(\delta_1 - \delta_2) = -\alpha\lambda c \tag{6.14}$$

即 $\delta_1 - \delta_2 = -\alpha\alpha_3^{-1}\lambda c$，此时由 (6.11)，

$$a\lambda b + (\delta_1 - \delta_2)r = \alpha\alpha_3^{-1}\lambda(rc - a_x) - \alpha\alpha_3^{-1}\lambda rc = -\alpha\alpha_3^{-1}\lambda a_x$$

于是得到一个生成 Lax 可积发展方程的决定性方程

$$\left[\mu(U(\lambda)-U(\mu))/(\lambda-\mu), V(\mu)\right]+\Delta_x(\mu)-[U(\lambda),\Delta(\mu)]$$

$$=\delta'_{1x}h_1+\delta'_{2x}h_2-\alpha\alpha_3^{-1}\mu a'_x e=f'_1h_1+f'_3h_2+f'_2e \qquad (6.15)$$

令

$$V^{(n)}=(\lambda^n V)_+ +\Delta_n \quad (n\geq -1)$$

按scheme格式, 有

$$\sum_{n\geq -1}(V_x^{(n)}(\lambda)-\left[(U(\lambda),V^{(n)}(\lambda)\right])\mu^{-n}$$

$$=\left[\mu(U(\lambda)-U(\mu))/(\lambda-\mu),V(\mu)\right]+\Delta_x(\mu)-[U(\lambda),\Delta(\mu)]$$

因此通过 (6.15) 可知一串零曲率表示

$$U_{tn}-V_x^n+\left[U,V^{(n)}\right]=0 \qquad (n\geq -1)$$

给出 Lax 可积发展方程族

$$\begin{cases} q_{tn}=\delta_{1nx} \\ r_{tn}=-\alpha\alpha_3^{-1}a_{(n+1)x} \qquad (n\geq -1) \\ s_{tn}=\delta_{2nx}\end{cases} \qquad (6.16)$$

其中 $a_n$ 由 (6.12) 确定, $\delta_i=\sum_{n\geq -1}\delta_{in}\lambda^{-n}\quad(i=1,2)$ 满足条件 (6.14). 明显地这里 (6.16) 包含了一个任意的函数. 下面选取函数使 (6.16) 成为一族广义 Hamilton 方程.

容易从 (6.9) 和 (6.10) 算得

$$\frac{\partial U}{\partial q}=h_1,\ \frac{\partial U}{\partial r}=e,\ \frac{\partial U}{\partial s}=h_2,\ \frac{\partial U}{\partial\lambda}=\alpha_1h_1+\alpha_2h_2 \qquad (6.17)$$

以及

$$<V,\frac{\partial U}{\partial q}>=a,<V,\frac{\partial U}{\partial r}>=c,<V,\frac{\partial U}{\partial s}>=-a,<V,\frac{\partial U}{\partial\lambda}>=\alpha a \qquad (6.18)$$

特别地选取

$$\delta_1 = \lambda(\beta_1 a + \beta_2 c), \delta_2 = \lambda(\beta_1 a + \beta_3 c) \tag{6.19}$$

这里 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是常数，且

$$\beta_2 - \beta_3 = -\alpha\alpha_3^{-1} \tag{6.20}$$

如果选取

$$J = \begin{pmatrix} \beta_1\partial & \beta_2\partial & 0 \\ \beta_2\partial & 0 & \beta_3\partial \\ 0 & \beta_3\partial & -\beta_1\partial \end{pmatrix} \tag{6.21}$$

于是有

$$\begin{aligned}&\lambda J\left(<V, \frac{\partial U}{\partial q}>, <V, \frac{\partial U}{\partial r}>, <V, \frac{\partial U}{\partial s}>\right)^T \\ &= \lambda J(a, c, -a)^T = (\delta_{1x}, -\alpha\alpha_3^{-1}\lambda a_x, \delta_{2x})^T = (f_1, f_2, f_3)^T\end{aligned} \tag{6.22}$$

明显地，$J$ 是一个 Hamilton 算子，因此可以定义一个 Poisson 括弧

$$\left\{\tilde{H}, \tilde{I}\right\} = \int \left(\frac{\delta \tilde{H}}{\delta u}\right)^T J \frac{\delta \tilde{I}}{\delta u} \mathrm{d}x, \tilde{H} = \int H \mathrm{d}x, \tilde{I} = \int I \mathrm{d}x \tag{6.23}$$

应用迹恒等式

$$\frac{\delta}{\delta u} <V, \frac{\partial U}{\partial \lambda}> = \lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial \lambda}\lambda^{\gamma}\left(<V, \frac{\partial U}{\partial q}>, <V, \frac{\partial U}{\partial r}>, <V, \frac{\partial U}{\partial s}>\right)^T$$

立即得到

$$\frac{\delta}{\delta u}\alpha a = \lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial \lambda}\lambda^{\gamma}(a, c, -a)^T$$

比较等式两边 $\lambda^{n-1}$ 的系数可得

$$\frac{\delta}{\delta u}\alpha a_{n+1} = (\gamma - n)(a_n, c_n, -a_n)^T, n \geq 0$$

为固定出常数 $\gamma$，我们令 $n = 0$ 得到 $\gamma(\eta, 0, -\eta) = 0$，可见 $\gamma = 0$。这样就得到一个重要公式

$$\frac{\delta H_n}{\delta u} = (a_n, c_n, -a_n)^T, n \geq 0 \tag{6.24}$$

其中 $H_n$ 如下定义

$$H_0 = \eta(q-s), H_n = -\frac{\alpha a_{n+1}}{n}, n \geq 1 \tag{6.25}$$

因此由 (6.22) 知发展方程族 (6.16) 变成如下广义 Hamilton 方程族

$$\begin{pmatrix} q \\ r \\ s \end{pmatrix}_{t_n} = J \begin{pmatrix} \dfrac{\delta H_{n+1}}{\delta q} \\ \dfrac{\delta H_{n+1}}{\delta r} \\ \dfrac{\delta H_{n+1}}{\delta s} \end{pmatrix}, n \geq -1 \tag{6.26}$$

现在我们假定 $H = \sum\limits_{n>0} H_n \lambda^{-n}$. 则

$$\frac{\delta H}{\delta u} = \left(< V, \frac{\partial U}{\partial q} >, < V, \frac{\partial U}{\partial r} >, < V, \frac{\partial U}{\partial s} >\right)^T$$

另外, 通过直接计算可表明

$$\left(< V(\lambda), \frac{\partial U(\lambda)}{\partial q} >, < V(\lambda), \frac{\partial U(\lambda)}{\partial r} >, < V(\lambda), \frac{\partial U(\lambda)}{\partial s} >\right)$$

$$(f_1(\mu), f_2(\mu), f_3(\mu))^T = < V(\lambda), \mu V(\mu)/(\mu-\lambda) + \Delta(\mu) >_x$$

因此由 (6.22) 得到

$$\mu \frac{\delta H(\lambda)}{\delta u} J \frac{\delta H(\mu)}{\delta u} = < V(\lambda), \mu V(\mu)/(\mu-\lambda) + \Delta(\mu) >_x$$

而

$$< V(\lambda), \mu V(\mu)/(\mu-\lambda) + \Delta(\mu) > = \frac{\mu}{\mu-\lambda}(2aa' + bc' + cb') - \alpha\alpha_3^{-1}\mu a c'$$

所以

$$(\mu-\lambda)\frac{\partial H(\lambda)}{\partial u} J \frac{\partial H(\mu)}{\partial u} = [(2aa'+bc'+cb') + (\lambda-\mu)\alpha\alpha_3^{-1} a c']_x \tag{6.27}$$

基于 (6.27), 我们可知 $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是广义 Hamilton 方程族 (6.26) 的一串公共守恒密度, 且关于 Poisson 括弧 (6.23) 彼此对合. 再注意关系 (6.25) 和递推式 (6.12) 不难见到 $\{dH_n\}_{n=0}^{\infty}$ 线性无关. 故广义 Hamilton 方程族 (6.26) 是 Liouvillle 可积的. 而且由于

$$\left\{J\frac{\delta H_m}{\delta u}, J\frac{\delta H_n}{\delta u}\right\} = J\frac{\delta}{\delta u}\left\{\tilde{H}_m, \tilde{H}_n\right\} = 0, \quad 0 \leq m, n < \infty$$

方程族 (6.26) 具有一串公共对称

$$\left\{X_{n-1}=J\frac{\delta H_n}{\delta u}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

另外, 容易算出

$$\begin{cases} a_{n+1}=P_a a_n+P_c c_n \\ c_{n+1}=Q_a a_n+Q_c c_n \end{cases} \quad n>0 \tag{6.28}$$

其中

$$\begin{cases} P_a=\alpha^{-1}[\partial-\partial^{-1}(q-s)\partial], \quad P_c=-\alpha^{-1}(\partial^{-1}r\partial+r) \\ Q_a=2\alpha^{-1}\alpha_3, \quad Q_c=-\alpha^{-1}[\partial+(q-s)] \end{cases} \tag{6.29}$$

因此有

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ c_{n+1} \\ -a_{n+1} \end{pmatrix}=L\begin{pmatrix} a_n \\ c_n \\ -a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_a+R_1 & P_c & R_1 \\ Q_a+R_2 & Q_c & R_2 \\ -P_a-R_3 & -P_c & R_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ c_n \\ -a_n \end{pmatrix} \tag{6.30}$$

其中 $n\geq 0$, $R_1$、$R_2$、$R_3$ 均是任意的微分积分算子. 这表明算子 $L$ 包含三个任意算子, 这一点与通常的可积系不同.

### 6.2.1 一种约化

本节考虑 (6.8) 的一种约化: $q=\alpha_4 s$, $\alpha_4\neq 1$ 为常数. 此时

$$U=\begin{pmatrix} \alpha_1\lambda+\alpha_4 s & r \\ \alpha_3 & \alpha_2\lambda+s \end{pmatrix}, \alpha_1\neq\alpha_2, \alpha_3\neq 0, \alpha_4\neq 1 \tag{6.31}$$

我们选取 $\delta_1=\alpha_4\delta_2$. 为满足条件 (6.14) 需要取定

$$\delta_2=-\frac{\alpha}{\alpha_3(\alpha_4-1)}\lambda c \tag{6.32}$$

这样 Lax 可积方程族 (6.16) 变成

$$\begin{cases} r_{t_n}=-\alpha\alpha_3^{-1}a_{n+1,x} \\ s_{t_n}=\delta_{2nx}=-\dfrac{\alpha}{\alpha_3(\alpha_4-1)}c_{n+1,x} \end{cases} \quad n\geq -1 \tag{6.33}$$

为推导 (6.33) 的 Hamilton 结构. 首先计算出,

$$\frac{\partial U}{\partial r}=c,\quad \frac{\partial U}{\partial s}=\alpha_4 h_1+h_2,\quad \frac{\partial U}{\partial \lambda}=\alpha_1 h_1+\alpha_2 h_2$$

$$< V,\frac{\partial U}{\partial r}>=c,< V,\frac{\partial U}{\partial s}>=(\alpha_4-1)a,< V,\frac{\partial U}{\partial \lambda}>=\alpha a$$

再选取 Hamilton 算子 $J$ 为

$$J=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\alpha}{\alpha_3(\alpha_4-1)}\partial \\ \dfrac{\alpha}{\alpha_3(\alpha_4-1)}\partial & 0 \end{pmatrix} \tag{6.34}$$

则有

$$\lambda J\begin{pmatrix} 0 \\ (\alpha_4-1)a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\alpha\alpha_3^{-1}\lambda a_x \\ \delta_{2x} \end{pmatrix} \tag{6.35}$$

另由迹恒等式产生

$$\frac{\delta}{\delta u}\alpha a=\lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial \lambda}\lambda^{\gamma}\begin{pmatrix} 0 \\ (\alpha_4-1)a \end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

写成系数形式即为

$$\frac{\delta}{\delta u}\alpha a_{n+1}=(\gamma-n)\begin{pmatrix} c_n \\ (\alpha_4-1)a_n \end{pmatrix},\quad n\geq 0$$

令 $n=0$ 可推出 $\gamma=0$. 于是

$$\frac{\delta H_n}{\delta u}=\begin{pmatrix} c_n \\ (\alpha_4-1)a_n \end{pmatrix},\quad n\geq 0$$

其中 $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ 定义如下

$$H_0=(\alpha_4-1)\eta s,\quad H_n=-\frac{\alpha a_{n+1}}{n},n\geq 1 \tag{6.36}$$

此时方程族变成如下形式

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}_{t_n}=J\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ (\alpha_4-1)a_{n+1} \end{pmatrix}=J\begin{pmatrix} \dfrac{\delta H_{n+1}}{\delta r} \\ \dfrac{\delta H_{n+1}}{\delta s} \end{pmatrix},n\geq -1 \tag{6.37}$$

这表明方程族 (6.33) 具有 Hamilton 结构. 容易算得如下递推关系

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ (\alpha_4-1)a_{n+1} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} c_n \\ (\alpha_4-1)a_n \end{pmatrix} \tag{6.38}$$

$$L = \begin{pmatrix} -\alpha^{-1}\left(\partial+(\alpha_4-1)s\right) & \dfrac{2\alpha_3}{\alpha(\alpha_4-1)} \\ -\alpha^{-1}(\alpha_4-1)(\partial^{-1}r\partial+r) & \alpha^{-1}\left(\partial-(\alpha_4-1)\partial^{-1}s\partial\right) \end{pmatrix}$$

以及 $J, L$ 的乘积算子

$$\begin{aligned} M = JL &= \begin{pmatrix} \alpha_3^{-1}(r\partial+\partial r) & -\dfrac{1}{\alpha_3(\alpha_4-1)}\partial^2+\alpha_3^{-1}s\partial \\ \dfrac{1}{\alpha_3(\alpha_4-1)}\partial^2+\alpha_3^{-1}\partial s & -\dfrac{2}{(\alpha_4-1)^2}\partial \end{pmatrix} \\ &= L^*J = -M^* \end{aligned} \tag{6.39}$$

$L$ 的共轭算子 $L^*$ 是一个遗传对称, 且算子 $M$ 是一个 Hamilton 对. 通过 (6.37) 和 (6.38), 方程族 (6.33) 成为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}_{t_n} &= \begin{pmatrix} -\alpha\alpha_3^{-1}a_{n+1,x} \\ -\dfrac{\alpha}{\alpha_3(\alpha_4-1)}c_{n+1,x} \end{pmatrix} - JL^{n+1}\begin{pmatrix} 0 \\ (\alpha_4-1)\eta \end{pmatrix} \\ &= J\begin{pmatrix} \dfrac{\delta H_{n+1}}{\delta r} \\ \dfrac{\delta H_{n+1}}{\delta s} \end{pmatrix}, \quad n \geq -1 \end{aligned} \tag{6.40}$$

前两个非零系统为

$$\begin{cases} r_{t_1} = 2\alpha^{-1}\eta r_x, s_{t_1} = 2\alpha^{-1}\eta s_x \\ r_{t_2} = -2\alpha^{-2}\eta[-r_{xx}+2(\alpha_4-1)(rs)_x] \\ s_{t_2} = -2\alpha^{-2}\eta[-\dfrac{\alpha_3}{\alpha_4-1}r_x+s_{xx}+2(\alpha_4-1)ss_x] \end{cases} \tag{6.41}$$

另一方面, 一个类似的计算 Poisson 括弧的关系式为

$$(\mu-\lambda)\frac{\delta H(\lambda)}{\delta u}J\frac{\delta H(\mu)}{\delta u} = [(2aa'+bc'+cb')+(\lambda-\mu)\alpha\alpha_3^{-1}ac']_x$$

这个关系式与 (6.27) 式一模一样, 这里 $J$ 是由 (6.34) 确定,

$$H(\lambda)=\sum_{n\geq 0} H_n\lambda^{-n} \tag{6.42}$$

其中 $H_n$ 由 (6.36) 确定. 利用上述关系式, 类似证明方程族 (6.40) 是 Liouville 可积的, 而 $\{H_n\}_{n=0}^{\infty}$ 正是 Liouville 可积性需要的守恒密度, 并且

$$\left\{X_{n-1}=J\frac{\delta H_n}{\delta u}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

是方程族 (6.40) 的一串公共的对称.

下面我们给出约化的两种特殊情形.

情形 1: 设 $\alpha_1=-\alpha_2=-\dfrac{1}{2},\alpha_3=1,\alpha_4=-1,s=-\dfrac{1}{2}u_1$, $r=-u_2$, 那么 (6.31) 的矩阵 $U$ 成为

$$U=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}u_1 & -u_2 \\ 1 & \frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}u_1 \end{pmatrix}$$

曹策问教授研究了上述 $U$ 相应的等谱问题的非线性化, 许宝智和赵中琪利用迹恒等式建立了相应可积族的 Hamilton 结构. 这个族中的第一个非线性系统是下列色散长波方程.

$$\begin{cases} u_{1t}=u_{1xx}+2u_1u_{1x}+2u_{2x} \\ u_{2t}=-u_{2xx}+2(u_1u_2)_x \end{cases}\quad\left(\eta=-\frac{1}{2}\right)$$

情形 2: 设 $\alpha_1=0,\alpha_2=1,\alpha_3=-1,\alpha_4=0,r=-u_1,s=-u_2$, 那么有

$$U=\begin{pmatrix} 0 & -u_1 \\ -1 & \lambda-u_2 \end{pmatrix}$$

这个 $U$ 曾由 Levi 引进过. 在这个 Levi 族中的前二个典型的可积系为

$$\begin{cases} u_{1t}=-u_{1xx}+2(u_1u_2)_x \\ u_{2t}=-2u_{1x}+u_{2xx}+2u_2u_{2x} \end{cases}\quad\left(\eta=-\frac{1}{2}\right)$$
$$\begin{cases} u_{1t}=u_{1xxx}-6u_1u_{1x}-3(u_{1x}u_2)_x+3(u_1u_2^2)_x \\ u_{2t}=u_{2xxx}+\frac{3}{2}(u_2^2)_{xx}+(u_2^3)_x-6(u_1u_2)_x \end{cases}\quad\left(\eta=-\frac{1}{2}\right) \tag{6.43}$$

由于当 $u_2 = 0$ 时系统 (6.43) 约化为 KdV 方程, 故系统 (6.43) 被称为耦合 KdV 方程.

# 6.3 广义 KN 方程族及其 Hamilton 结构

## 6.3.1 带有任意函数的 Lax 可积的非线性方程族

取 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 的基

$$\begin{cases} h(n) = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & -\lambda^n \end{pmatrix}, e_+(n) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_-(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda^n & 0 \end{pmatrix} \\ [h(m), e_+(n)] = 2e_+(m+n), [h(m), e_-(n)] = -2e_-(m+n) \\ [e_+(m), e_-(n)] = h(m+n), \\ \deg h(n) = \deg e(n) = \deg f(n) = n \end{cases} \tag{6.44}$$

考虑等谱问题:

$$\begin{cases} \psi_x = U\psi, \lambda_t = 0, \psi = (\psi_1, \psi_2)^T \\ U = \begin{pmatrix} \lambda + f(qr) & q \\ \lambda r & -\lambda - f(qr) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{6.45}$$

则 (6.45) 中的 $U$ 可表示为:

$$U = h(1) + f(qr)h(0) + qe_+(0) + re_-(1)$$

其中 $q = q(x,t), r = r(x,t), f$ 是任意光滑函数.

令

$$V = ah(0) + be_+(0) + ce_-(0)$$

其中

$$a = \sum_{m=0}^{\infty} a_m\lambda^{-m}, b = \sum_{m=0}^{\infty} b_m\lambda^{-m}, c = \sum_{m=0}^{\infty} c_m\lambda^{-m}$$

解辅助方程

$$V_x = [U, V] \tag{6.46}$$

得递推式

$$\begin{cases} a_{mx} = qc_m - rb_{m+1} \\ b_{mx} = 2b_{m+1} + 2f(qr)\, b_m - 2qa_m \\ c_{mx} = -2c_{m+1} - f(qr)\, c_m + 2ra_{m+1} \\ a_0 = 1, c_0 = r, b_0 = 0, b_1 = q, a_1 = -\dfrac{1}{2}qr \\ c_1 = -rf(qr) - \dfrac{r_x}{2} - \dfrac{1}{2}r^2 q, b_2 = \dfrac{1}{2}q_x - qf(qr) - \dfrac{1}{2}rq^2, \cdots \end{cases} \tag{6.47}$$

令

$$\lambda^n V = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m h(n-m) + b_m e_+(n-m) + c_m e_-(n-m))$$

记

$$V_+^{(n)} = (\lambda^n V)_+ = \sum_{m=0}^{n} (a_m h(n-m) + b_m e_+(n-m) + c_m e_-(n-m))$$

$V^{(n)} = \lambda^n V - V_+^{(n)}$

取 $V^{(n)} = V_+^{(n)} + \Delta_n h(0)$, 其中 $\Delta_n$ 为待定的函数, 则由零曲率方程

$$U_t - V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] = 0$$

得

$$\begin{cases} [f(qr)]'_{tn} = f'(qr)(qr_t + rq_t) = \Delta_{nx} \\ q_{tn} = b_{nx} + 2q\Delta_n - 2f(qr)b_n \\ r_{tn} = c_{n-1,x} - 2r\Delta_n + 2f(qr)c_{n-1} \end{cases} \tag{6.48}$$

从上式可求出

$$\Delta_n = \partial^{-1}[f'(qr)b_{nx} - 2rf(qr)b_n + qc_{n-1,x} + 2qf(qr)c_{n-1}]$$

并确定一组新的带有任意函数的 Lax 可积的非线性方程族

$$
u_{tn} = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_{tn}
= \begin{pmatrix} b_{nx} + 2q\partial^{-1}f'(qr)[rb_{nx} - 2rf(qr)b_n + qc_{n-1x} + 2qf(qr)c_{n-1}] \\ \quad -2f(qr)b_n \\ c_{n-1x} - 2r\partial^{-1}f'(qr)[rb_{nx} - 2rf(qr)b_n + qc_{n-1x} + 2qf(qr)c_{n-1}] \\ \quad +2f(qr)c_{n-1} \end{pmatrix}
$$

又

$$
u_{tn} = ML_2 \begin{pmatrix} c_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} \tag{6.49}
$$

其中

$$
M = \begin{pmatrix} 1 + 2q\partial^{-1}[rf'(qr)] & 2q\partial^{-1}[qf'(qr)] \\ -2r\partial^{-1}[rf'(qr)] & 1 - 2r\partial^{-1}[qf'(qr)] \end{pmatrix}
$$

$$
L_2 = \begin{pmatrix} 0 & \partial - 2f(qr) \\ \partial + 2f(qr) & 0 \end{pmatrix}
$$

当 $n = 1$ 时, 方程族 (6.49) 变为平凡方程族

$$
q_t = q_x, r_t = r_x
$$

由 (6.47) 得出

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} c_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} r\partial^{-1}r & 1 + r\partial^{-1}q \\ -1 + q\partial^{-1}r & q\partial^{-1}q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ F & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} \\
&= L_1L_2 \begin{pmatrix} c_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} c_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.50}
$$

其中

$$A=-\frac{1}{2}\partial-\frac{1}{2}r\partial^{-1}q\partial-r\partial^{-1}qf(qr)-f(qr)$$

$$C=-\frac{1}{2}r\partial^{-1}r\partial+r\partial^{-1}rf(qr)$$

$$B=\frac{1}{2}\partial-\frac{1}{2}q\partial^{-1}r\partial+q\partial^{-1}rf(qr)-f(qr)$$

$$D=-\frac{1}{2}q\partial^{-1}q\partial-q\partial^{-1}qf(qr)$$

$$E=\partial-2f(qr),F=\partial-2f(qr)$$

因此 (6.48) 式可写为

$$u_{tn}=\begin{pmatrix}q\\r\end{pmatrix}_{tn}=ML_2\begin{pmatrix}c_{n-1}\\b_n\end{pmatrix}=ML_2L^{n-1}\begin{pmatrix}r\\q\end{pmatrix}\tag{6.51}$$

## 6.3.2 Hamilton 结构

设当 $A,B\in\tilde{A}_1$ 时，$<A,B>=\mathrm{tr}(AB)$ 表示 Killing-Cartan 型，下面计算有关的量

$$\frac{\partial U}{\partial q}=\begin{pmatrix}rf'(qr)&1\\0&-rf'(qr)\end{pmatrix},\frac{\partial U}{\partial r}=\begin{pmatrix}qf'(qr)&0\\\lambda&-qf'(qr)\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial U}{\partial\lambda}=\begin{pmatrix}1&0\\r&-1\end{pmatrix}$$

于是有

$$\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial\lambda}\right\rangle=2a+rb,\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial q}\right\rangle=c+2arf'(qr)$$

$$\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial r}\right\rangle=b\lambda+2aqf'(qr)$$

利用迹恒等式

$$\frac{\delta}{\delta u}\left\langle V,\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right\rangle=\lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial\lambda}\lambda^{\gamma}\left(\left\langle V,\frac{\partial u}{\partial p}\right\rangle,\left\langle V,\frac{\partial u}{\partial r}\right\rangle\right)^T$$

得

$$\frac{\delta}{\delta u}(2a+rb)=\lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial\lambda}\lambda^{\gamma}(c+2arf'(qr),b\lambda+2aqf'(qr))^T$$

比较 $\lambda^{-n}$ 的系数

$$\frac{\delta}{\delta u}(2a_n+rb_n)=(\gamma-n)(c_n+2ra_nf'(qr),b_{n+1}+2qa_nf'(qr))^T$$

令 $n=0$，于是知 $\gamma=0$.

令

$$H_n=\frac{2a_n+rb_{n+1}}{n}$$

则

$$\frac{\delta H_n}{\delta u}=(c_n+2ra_nf'(qr),b_{n+1}+2qa_nf'(qr))^T \tag{6.52}$$

而由 $a_n=\partial^{-1}(qc_n-rb_{n+1})$ 得到,

$$\begin{pmatrix}c_n\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2rf'(qr)\partial^{-1}q & 2rf'(qr)\partial^{-1}r\\ -2qf'(qr)\partial^{-1}q & 1+2qf'(qr)\partial^{-1}r\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}c_n+2rf'(qr)a_n\\ b_{n+1}+2qf'(qr)a_n\end{pmatrix}=M^*\begin{pmatrix}c_n+2rf'(qr)a_n\\ b_{n+1}+2qf'(qr)a_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}c_n+2rf'(qr)a_n\\ b_{n+1}+2qf'(qr)a_n\end{pmatrix}=M^{-1}LM^*\begin{pmatrix}c_{n-1}+2rf'(qr)a_{n-1}\\ b_n+2qf'(qr)a_{n-1}\end{pmatrix} \tag{6.53}$$

其中

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}1+2rf'(qr)\partial^{-1}q & -2rf'(qr)\partial^{-1}r\\ 2qf'(qr)\partial^{-1}q & 1-2qf'(qr)\partial^{-1}r\end{pmatrix}$$

所以, 方程族 (6.51) 的 Bi-Hamilton 结构

$$u_{tn}=\begin{pmatrix}q\\ r\end{pmatrix}_{tn}=X_n=J\frac{\delta H_n}{\delta u}=K\frac{\delta H_{n-1}}{\delta u} \tag{6.54}$$

其中 $J=ML_2M^*$,$K=ML_2L_1L_2M^*$.

### 6.3.3 几个结论

1) 算子 $L_1, L_2$ 是斜对称算子, 即 $L*_1 = -L_1, L*_2 = -L_2$.

2) 算子 $J, K$ 也是斜对称算子. 这是因为

$J^* = (ML_2M^*)^* = ML_2^*M^* = -ML_2M^* = -J$

$K^* = (ML_2L_1L_2M^*)^* = ML_2^*L_1^*L_2^*M^* = -ML_2L_1L_2M^* = -K$

3) 方程族 (6.51) 是 Liouville 可积的.

证明: 令 $H(\lambda) = \sum\limits_{n\geq 0} H_n\lambda^{-n}$, 且直接计算可知道,$\{H_n\}_0^\infty$ 在 Poisson 括号

$$\{H_m, H_n\} = \int (\frac{\delta H(\lambda)}{\delta u}, J\frac{\delta H(\mu)}{\delta u})\mathrm{d}x = 0$$

之下为两两对合, 所以方程族 (6.51) 是 Liouville 可积的.

4) 当 $f = 0$ 时, 变为著名的 KN 方程族

$$u_{tn} = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_{tn} = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\partial - \frac{1}{2}r\partial^{-1}q\partial & -\frac{1}{2}r\partial^{-1}r\partial \\ -\frac{1}{2}q\partial^{-1}q\partial & \frac{1}{2}\partial - \frac{1}{2}q\partial^{-1}r\partial \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}$$

是 Liouville 可积的, 它具有 Bi-Hamilton 结构.

5) 当 $f = -\frac{1}{2}qr$ 时, 变为 Qiao 谱, 方程族为

$$u_{tn} = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_{tn} = \begin{pmatrix} 1 - q\partial^{-1}r & -q\partial^{-1}q \\ r\partial^{-1}r & 1 + r\partial^{-1}rq \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \partial + qr \\ \partial - qr & 0 \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} A & -\frac{1}{2}r\partial^{-1}r\partial - \frac{1}{2}r\partial^{-1}r^2q \\ -\frac{1}{2}q\partial^{-1}q\partial + \frac{1}{2}q\partial^{-1}q^2r & B \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}$$

其中

$$A = -\frac{1}{2}\partial - \frac{1}{2}r\partial^{-1}q\partial + \frac{1}{2}r\partial^{-1}q^2r + \frac{1}{2}qr$$
$$B = \frac{1}{2}\partial - \frac{1}{2}q\partial^{-1}r\partial - \frac{1}{2}q\partial^{-1}qr^2 + \frac{1}{2}qr$$

它是 Liouville 可积的, 它具有 Bi-Hamilton 结构.

# 6.4 矩阵 loop 代数及其方程族的 Hamilton 结构

我们首先给出一个新的矩阵 Lie 代数

$$
\begin{cases}
e_1 = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & -I_M \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & I_{1\times M} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{M\times 1} & 0 \end{pmatrix} \\
[e_1, e_2] = (M+1)e_2, [e_1, e_3] = -(M+1)e_3, [e_2, e_3] = e_1
\end{cases}
\tag{6.55}
$$

其中 $I_M$ 是 $M \times M$ 阶单位矩阵

$$I_{1\times M} = (1, 1, \cdots, 1), I_{M\times 1} = (1, 1, \cdots, 1)^T$$

$M$ 是任意正整数.

令 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_M), b = (b_1, b_2, \cdots, b_M)^T$ 是向量,$c$ 是标量, 定义它们的运算关系:

$$
\begin{cases}
a * b^T = b^T * a = (a_1 b_1, \cdots, a_M b_M) \\
b * a^T = a^T * b = (a_1 b_1, \cdots, a_M b_M) \\
a \cdot b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{pmatrix} (b_1, b_2, \cdots, b_M) \equiv (a_i b_i), ce_1 = \begin{pmatrix} cM & 0 \\ 0 & -cI_M \end{pmatrix} \\
ae_2 = \begin{pmatrix} 0 & a \cdot I_{1\times M} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, be_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b * I_{M\times 1} & 0 \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

矩阵 Loop 代数 $\tilde{A}_{M-1}$

$$\begin{cases} e_k(j,n)=e_k\lambda^{3n+j}, \deg(e_k(i,n))=3n+i, k=1,2,3; j=0,1,2 \\ [e_1(i,m),e_2(j,n)]=\begin{cases}(M+1)e_2(i+j,m+n), i+j<3\\ (M+1)e_2(0,m+n+1), i+j=3\\ (M+1)e_2(1,m+n+1), i+j=4\end{cases} \\ [e_1(i,m),e_3(j,n)]=\begin{cases}-(M+1)e_3(i+j,m+n), i+j<3\\ -(M+1)e_3(0,m+n+1), i+j=3\\ -(M+1)e_3(1,m+n+1), i+j=4\end{cases} \\ [e_2(i,m),e_3(j,n)]=\begin{cases}e_1(i+j,m+n), i+j<3\\ e_1(0,m+n+1), i+j=3\\ e_1(1,m+n+1), i+j=4\end{cases}\end{cases} \tag{6.56}$$

考虑下列等谱问题

$$\begin{cases}\varphi_x=[U,\varphi], \lambda_t=0, \varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_5)^T\\ U=\alpha e_1(1)+\beta qre_1(0)+qe_2(0)+re_3(0)\\ \operatorname{rank}(U)=\operatorname{rank}(\partial)=1,\\ \operatorname{rank}(u_1)=\operatorname{rank}(u_2)=\operatorname{rank}(u_3)=\operatorname{rank}(u_4)=\operatorname{rank}(u_5)=2\end{cases} \tag{6.57}$$

其中, $u_1=(u_{11},u_{21},\cdots,u_{M1})$, $u_2=(u_{12},u_{22},\cdots,u_{M2})^T$, $u_3=(u_{13},u_{23},\cdots,u_{M3})$, $u_4=(u_{14},u_{24},\cdots,u_{M4})^T$, $u_5$ 是一个简单函数.

设

$$V=\sum_{m>0}[\sum_{i=0}^{2}(a(i,m)e_1(i,-m)+b(i,m)e_2(i,-m)+c(i,m)e_3(i,-m))]$$

这里 $a(i,m)$ 是光滑简单函数. $b(i,m)=(b_{m1}^{(i)},\cdots,b_{mM}^{(i)}), c(i,m)=(c_{m1}^{(i)},\cdots,c_{mM}^{(i)})^T$, $(i=0,1,2)$

由零曲率方程

$$V_x=[U,V] \tag{6.58}$$

得到下面的递推式,

$$a_x(0,m)=u_1c(0,m)-b(0,m)u_2+u_3c(1,m)-b(1,m)u_4$$

$$a_x(1,m)=u_1c(1,m)-b(1,m)u_2+u_3c(2,m)-b(2,m)u_4$$

$$a_x(2,m+1)=u_1c(2,m+1)-b(2,m+1)u_2+u_3c(0,m)$$
$$-b(0,m)u_4$$

$$b_x(0,m)=(M+1)[b(2,m+1)-u_1a(0,m)-u_3a(1,m)$$
$$+u_5b(1,m)]$$

$$b_x(1,m)=(M+1)[b(0,m)-u_1a(1,m)-u_3a(2,m)+u_5b(2,m)]$$

$$b_x(2,m+1)=(M+1)[b(1,m+1)-u_1a(2,m+1)-u_3a(0,m)$$
$$+u_5b(0,m)]$$

$$c_x(0,m)=(M+1)[-c(2,m+1)+u_2a(0,m)+u_4a(1,m)$$
$$-u_5c(1,m)]$$

$$c_x(1,m)=(M+1)[-c(0,m)+u_2a(1,m)+u_4a(2,m)-u_5c(2,m)],$$

$$c_x(2,m+1)=(M+1)[-c(1,m+1)+u_2a(2,m+1)+u_4a(0,m)$$
$$-u_5c(0,m)]$$

$$a_0=\beta=\text{const.}\neq 0,a(1,0)=a(2,0)=a(2,1)=0$$

$$b(1,0)=b(0,0)=b(1,0)=(0,0,\cdots,0)=0$$

$$c(1,0)=c(0,0)=(0,0,\cdots,0)^T=0$$

$$b(2,1)=\beta u_1=(\beta u_{11},\beta u_{21},\cdots,\beta u_{M1})$$

$$c(2,1)=\beta u_2=(\beta u_{12},\beta u_{22},\cdots,\beta u_{M2}),$$

$$b(1,1)=\frac{\beta}{M+1}u_{1x}+\beta u_3=(\frac{\beta}{M+1}u_{11x}+\beta u_{13},\frac{\beta}{M+1}u_{21x}$$
$$+\beta u_{23},\cdots,\frac{\beta}{M+1}u_{M1x}+\beta u_{M3})$$

$$c(1,1)=-\frac{\beta}{M+1}u_{2x}+\beta u_4=(-\frac{\beta}{M+1}u_{12x}+\beta u_{14},-\frac{\beta}{M+1}u_{22x}$$
$$+\beta u_{24},\cdots,-\frac{\beta}{M+1}u_{M2x}+\beta u_{M4})^T$$

$$a(1,1)=-\frac{\beta}{M+1}u_1u_2=-\frac{\beta}{M+1}\sum_{i=1}^{M}u_{i1}u_{i2}$$

$$b(0,1)=\frac{\beta}{(M+1)^2}u_{1xx}+\frac{\beta}{M+1}u_{3x}-\frac{\beta}{M+1}u_1^2u_2-\beta u_1u_5$$

$$c(0,1)=\frac{\beta}{(M+1)^2}u_{2xx}-\frac{\beta}{M+1}u_{4x}-\frac{\beta}{M+1}u_1u_2^2-\beta u_2u_5$$

$$a(0,1)=\frac{\beta}{(M+1)^2}(u_1u_{2x}-u_2u_{1x})-\frac{\beta}{M+1}(u_1u_4+u_3u_2)$$

取

$$V_+^{(n)}=(\lambda^{3n}V)_+=\sum_{m=0}^{n}\left[\sum_{i=0}^{2}a(i,m)e_1(i,n-m)+b(i,m)e_2(i,n-m)\right.$$
$$\left.+c(i,m)e_3(i,n-m)\right]$$
$$V_-^{(n)}=\lambda^{3n}V-V_+^{(n)}$$

方程 (6.58) 可写成

$$V_{+x}^{(n)}+[U,V_+^{(n)}]=-V_{-x}^{(n)}-[U,V_-^{(n)}]\tag{6.59}$$

直接计算知, 方程 (6.60) 左端阶数 (deg) $\geq -1$, 右端阶数 (deg) $<0$. 因此,

$$-V_{+x}^{(n)}+[U,V_+^{(n)}]=(M+1)b(2,n+1)e_2(0,0)-(M+1)$$
$$\cdot c(2,n+1)e_3(0,0)+[u_1c(2,n+1)-a_x(2,n+1)-b(2,n+1)u_2]$$
$$\cdot e_1(2,-1)+[-(M+1)u_1a(2,n+1)+(M+1)b(1,n+1)$$
$$-b_x(2,n+1)]e_2(2,-1)+[(M+1)u_2a(2,n+1)-(M+1)$$
$$\cdot c(1,n+1)-c_x(2,n+1)]e_3(2,-1)$$

取

$$V^{(n)}=V_+^{(n)}$$

那么

$$-V_x^{(n)}+[U,V^{(n)}]=-(M+1)\alpha\beta a_{n+1x}e_1(0)-(M+1)^2\alpha\beta a_{n+1}qe_2(0)$$
$$+(M+1)\alpha(b_{n+1}e_2(0)-c_{n+1}e_3(0))+(M+1)^2\alpha\beta a_{n+1}re_3(0)$$

因此由零曲率方程

$$U_t - V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] = 0 \tag{6.60}$$

得出下列 Lax 可积方程族

$$\begin{cases} (qr)_t = -(M+1)\alpha a_{n+1x} \\ q_t = (M+1)\alpha b_{n+1} - (M+1)^2\alpha\beta q a_{n+1} \\ r_t = -(M+1)\alpha c_{n+1} + (M+1)^2\alpha\beta r a_{n+1} \end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned} u_t &= \begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2 \\ u_3^T \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}_t \\ &= \begin{pmatrix} -(M+1)b(2,n+1)^T \\ (M+1)c(2,n+1) \\ -(M+1)b(1,n+1)^T + (M+1)u_1^T a(2,n+1) + b_x(2,n+1)^T \\ (M+1)c(1,n+1) - (M+1)u_2 a(2,n+1) + c_x(2,n+1) \\ -u_1 c(2,n+1) + b(2,n+1))u_2 + a_x(2,n+1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dfrac{M+1}{M} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{M+1}{M} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{M+1}{M} & 0 & \dfrac{\partial}{M} & \dfrac{1}{M}u_1^T \\ \dfrac{M+1}{M} & 0 & \dfrac{\partial}{M} & 0 & -\dfrac{1}{M}u_2 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{M}u_1 & \dfrac{1}{M}u_2^T & \dfrac{\partial}{M+M^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\times\begin{pmatrix} Mc(1,n+1) \\ Mb(1,n+1)^T \\ Mc(2,n+1) \\ Mb(2,n+1)^T \\ (M+M^2)a(2,n+1) \end{pmatrix} = J_1 \begin{pmatrix} Mc(1,n+1) \\ Mb(1,n+1)^T \\ Mc(2,n+1) \\ Mb(2,n+1)^T \\ (M+M^2)a(2,n+1) \end{pmatrix}
$$

$$
= J_1 G_{n+1} = \begin{pmatrix} (M+1)b(2,n+1)^T \\ (M+1)c(1,n+1) \\ (M+1)u_3^T a(0,n) + (M+1)u_5 b(0,n) \\ (M+1)u_4 a(0,n) - (M+1)u_5 c(0,n) \\ u_3 c(0,n) - b(0,n)u_4^T \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{M+1}{M} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{M+1}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{M+1}{M}u_5 & -\frac{1}{M}u_3^T \\ 0 & 0 & -\frac{M+1}{M}u_5 & 0 & \frac{1}{M}u_4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{M}u_3 & -\frac{1}{M}u_4^T & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\times\begin{pmatrix} Mc(2,n+1) \\ Mb(2,n+1)^T \\ Mc(0,n) \\ Mb(0,n)^T \\ (M+M^2)a(0,n) \end{pmatrix} = J_2 F_n - J_3 T_n \tag{6.61}
$$

$$
= \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} & \frac{1}{M}u_3^T \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} & \frac{1}{M}u_4 \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} & 0 \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} & 0 \\ \frac{1}{M}u_3 & -\frac{1}{M}u_4^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Mc(0,n) \\ Mb(0,n)^T \\ Mc(1,n) \\ Mb(1,n)^T \\ (M+M^2)a(1,n) \end{pmatrix}
$$

其中

$T_{11}=-\frac{M+1}{M}u_1\partial^{-1}u_1, T_{12}=\frac{\partial}{M}I_M+\frac{M+1}{M}u_1^T\partial^{-1}u_2$

$T_{13}=-\frac{M+1}{M}u_1\partial^{-1}u_3, T_{14}=\frac{M+1}{M}u_5+\frac{M+1}{M}u_1\partial^{-1}u_4$

$T_{21}=-\frac{\partial}{M}I_M+\frac{M+1}{M}u_2^T\partial^{-1}u_1, T_{22}=-\frac{M+1}{M}u_2\partial^{-1}u_2^T$

$T_{23}=-\frac{M+1}{M}u_5+\frac{M+1}{M}u_2\partial^{-1}u_3, T_{24}=-\frac{M+1}{M}u_2\partial^{-1}u_4^T$

$T_{31}=-\frac{M+1}{M}u_3^T\partial^{-1}u_1. T_{32}=\frac{M+1}{M}u_5+\frac{M+1}{M}u_3^T\partial^{-1}u_2^T$

$T_{33}=\frac{M+1}{M}u_3^T\partial^{-1}u_3, T_{34}=\frac{M+1}{M}u_3^T\partial^{-1}u_4^T$

$T_{41}=-\frac{M+1}{M}u_5+\frac{M+1}{M}u_4\partial^{-1}u_1, T_{42}=-\frac{M+1}{M}u_4\partial^{-1}u_2^T$

$T_{43}=-\frac{M+1}{M}u_4\partial^{-1}u_3, T_{44}=-\frac{M+1}{M}u_4\partial^{-1}u_4$

由 (6.59), 得到递推算子

$$L=(A\vdots B) \tag{6.62}$$

其中 A=

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial}{M+1}I_M+u_2\partial^{-1}u_1 & -u_2\partial^{-1}u_2^T & -u_5+u_2\partial^{-1}u_3 \\ u_1^T\partial^{-1}u_1^T & -\frac{\partial}{M+1}I_M-u_1^T\partial^{-1}u_2 & u_1\partial^{-1}u_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (M+1)\partial^{-1}u_1 & -(M+1)\partial^{-1}u_2^T & (M+1)\partial^{-1}u_3 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} -u_2\partial^{-1}u_4^T & \frac{1}{M+1}u_4 \\ -u_5-u_1\partial^{-1}u_4 & \frac{1}{M+1}u_3^T \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -(M+1)\partial^{-1}u_4^T & 0 \end{pmatrix}$$

$, L$ 满足 $G_{n+1}=LF_n, F_n=LT_n$. 所以,

$$u_t = J_1G_{n+1} = J_2F_n = J_3T_n = J_1LF_n = J_1L^2G_n$$

$$= J_1L^{2n}\begin{pmatrix} Mc(1,1) \\ Mb(0,1)^T \\ Mc(2,1) \\ Mb(2,1)^T \\ (M_2+M)a(2,1) \end{pmatrix} \tag{6.63}$$

$$V - \begin{pmatrix} a & b(0)+\lambda b(1)+\lambda^2 b(2) \\ c(0)+\lambda c(1)+\lambda^2 c(2) & -a \end{pmatrix}$$

其中,$a = M(a(0)I_M + \lambda a(1)I_M + \lambda^2 a(2)I_M)$

$a(0) = \sum_{m-0}^{\infty} a(0,m)\lambda^{-3m}, b(0) - \sum_{m=0}^{\infty} a(1,m)\lambda^{\ 3m}, \cdots$

直接计算有

$$\langle V, \frac{\partial U}{\partial u_1}\rangle = M(c(0)+\lambda c(1)+\lambda^2 c(2))$$
$$\langle V, \frac{\partial U}{\partial u_2}\rangle = M(b(0)+\lambda b(1)+\lambda^2 b(2))$$
$$\langle V, \frac{\partial U}{\partial u_3}\rangle = M(c(1)+\lambda c(2)+\frac{c(0)}{\lambda}c(0))$$
$$\langle V, \frac{\partial U}{\partial u_4}\rangle = M(\sum_{k=1}^{M}(\frac{1}{\lambda}b_{mk}^{(0)}+b_{mk}^{(1)}+\lambda b_{mk}^{(2)}))$$
$$\langle V, \frac{\partial U}{\partial u_5}\rangle = \frac{M^2a(0)}{\lambda}+M^2a(1)+M^2\lambda a(2)+\frac{Ma(0)}{\lambda}+Ma(1)+M\lambda a(2)$$
$$\begin{aligned}\langle V, \frac{\partial U}{\partial \lambda}\rangle = {} & M^2a(0)+M^2\lambda a(1)+M^2\lambda^2 a(2)-M^2u_5a(2)-\frac{1}{\lambda}M^2a(1)u_5 \\ & -\frac{1}{\lambda^2}M^2a(0)u_5-\frac{1}{\lambda^2}(b(0)+\lambda b(1)+\lambda^2 b(2))u_4 \\ & -\frac{1}{\lambda^2}(c(0)+\lambda c(1)+\lambda^2 c(2))u_3+Ma(0)+M\lambda a(1)+M\lambda^2 a(2) \\ & -Mu_5a(2)-\frac{1}{\lambda}Ma(1)u_5-\frac{1}{\lambda^2}Ma(0)u_5\end{aligned}$$

将上式代入迹恒等式

$$\frac{\delta}{\delta u}\langle V, \frac{\partial U}{\partial \lambda}\rangle = \lambda^{\ \gamma}\frac{\partial}{\partial \lambda}\lambda^{\gamma}(\langle V, \frac{\partial U}{\partial \lambda}\rangle) \tag{6.64}$$

比较式 (6.65) 两边的 $\lambda^{-3n\ \ 2}$ 系数, 得

$$\frac{\delta}{\delta u}[M^3a(1,n+1)-M^3u_5a(0,n)-Mb(0,n)u_4-Mu_3c(0,n)$$

$$+M^2a(1,n+1)-M^2u_5a(0,n)]=(-3n-1+\gamma)(Mc(1,n+1),$$

$$Mb(1,n+1)^T,Mc(2,n+1),Mb(2,n+1)^T,(M^2+M)a(2,n+1))^T$$

比较式 (6.65) 两边的 $\lambda^{-3n-1}$ 系数

$$\frac{\delta}{\delta u}[M^3a(2,n+1)-M^3u_5a(1,n)-Mb(1,n)u_4-Mu_3c(1,n)$$

$$+M^2a(2,n+1)-M^2u_5a(1,n)]=(-3n+\gamma)(Mc(2,n+1),$$

$$Mb(2,n+1)^T,Mc(0,n),Mb(0,n)^T,(M^2+M)a(0,n))^T$$

比较式 (6.65) 两边的 $\lambda^{-3n}$ 系数, 得

$$\frac{\delta}{\delta u}[M^3a(0,n)-M^3u_5a(2,n)-Mb(2,n)u_4-Mu_3c(2,n)$$

$$+M^2a(0,n)-M^2u_5a(2,n)]=(-3n+1+\gamma)\times(Mc(0,n),$$

$$Mb(0,n)^T,Mc(1,n),Mb(1,n)^T,(M^2+M)a(1,n))^T$$

代入初始值, 得 $\gamma=0$. 因此, 我们获得方程族 (6.62) 的 Hamiltonian 结构并且有

$$\begin{aligned}\frac{H(1,n)}{\delta u}=&M(c(1,n+1),b(1,n+1)^T,c(2,n+1),b(2,n+1)^T,\\&(M+1)a(2,n+1))^T\\H(1,n)=&-\frac{M}{3n+1}[M^2a(1,n+1)-M^2u_5a(0,n)-b(0,n)u_4\\&-u_3c(0,n)+Ma(1,n+1)-Mu_5a(0,n)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{H(2,n)}{\delta u}=M(c(2,n+1),b(2,n+1)^T,c(0,n),b(0,n)^T,\\
&\qquad (M+1)a(0,n))^T\\
&H(2,n)=-\frac{M}{3n}[M^2a(2,n+1)-M^2u_5a(1,n)-b(1,n)u_4\\
&\qquad -u_3c(1,n)+Ma(2,n+1)-Mu_5a(1,n)]\\
&\frac{H(3,n)}{\delta u}=M(c(0,n),b(0,n)^T,c(1,n),b(1,n)^T,(M+1)a(1,n))^T\\
&H(3,n)=-\frac{M}{3n-1}[M^2a(0,n)-M^2u_5a(2,n)-b(2,n)u_4\\
&\qquad -u_3c(2,n)+Ma(0,n)-Mu_5a(2,n)]
\end{aligned}$$

所以, 方程族 (6.62) 的 Bi-Hamiltonian 结构为

$$u_t=J_1\frac{\delta H(1,n)}{\delta u}=J_2\frac{\delta H(2,n)}{\delta u}=J_3\frac{\delta H(3,n)}{\delta u}$$

易证明

$$J_1L=L*J_1=J_2,\ J_2L-L*J_2=L*J_2=J_3$$

$$\frac{\delta H(1,n)}{\delta u}=L\frac{\delta H(2,n)}{\delta u}=L\frac{\delta H(3,n)}{\delta u}=L\frac{\delta H(1,n-1)}{\delta u}$$

因此方程族 (6.62) 是 Liouville 可积的. 如果取 $u_3=u_4=u_5=0$, 方程族 (6.62) 可以约化为多分量 BPT 族.

## 6.5 构造可积系统 Hamilton 结构的二次型恒等式

我们通常用矩阵形式的 loop 代数 $\tilde{A}_{n-1}$ 来构造线性等谱问题, 得到可积系. 事实上, 我们完全可以利用非矩阵形式 loop 代数, 由其相容性条件得到零曲率方程, 运用零曲率方程可得到许多可积系统. 为了得到这些可积系统的 Hamilton 结构, 本节给出了二次型恒等式, 而且迹恒等式是其特殊情形, 也就是说在考虑 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 时二者是完全一致的.

在 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 上等谱问题可表示为

$$\begin{cases} \psi_x = U\psi, U = U(\lambda, u), V = V(\lambda, u) \in \tilde{A}_1 \\ \psi_t = V\psi, \psi = (\psi_1, \psi_2)^T, u = (u_1, u_2, \cdots, u_p)^T, \lambda_t = 0 \end{cases} \tag{6.65}$$

由 (6.65) 式的相容性条件 $\psi_{xt} = \psi_{tx}$ 可得到如下的零曲率方程:

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \tag{6.66}$$

由 (6.66) 可得到 Lax 可积的非线性演化方程

$$U_t = K(u) \tag{6.67}$$

为了把 (6.67) 写成 Hamilton 形式, 屠规彰建立了如下的迹恒等式:

$$\frac{\delta}{\delta u_i}\left\langle V, \frac{\partial U}{\partial \lambda}\right\rangle = \lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\lambda^{-\gamma}\left\langle V, \frac{\partial U}{\partial u_i}\right\rangle\right), i = 1, 2, \cdots, p, \gamma = \text{const.} \tag{6.68}$$

事实证明在任意的 $\tilde{A}_{n-1}$ 上, 这种方法对于构造大量的连续和离散的可积系统的 Hamilton 结构都是十分简单和有效的. 上述方法中首先取 $A, B$ 的函数:

$$f(A, B) = \langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB), \quad A, B \in \tilde{A}_{n-1} \tag{6.69}$$

满足下列性质:
对称性

$$\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle \tag{6.70}$$

双线性

$$\langle \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2, B\rangle = \alpha_1 \langle A_1, B\rangle + \alpha_2 \langle A_2, B\rangle \tag{6.71}$$

变分计算的简化

$$\nabla_B \langle A, B\rangle = A, \nabla_B \langle A, B_x\rangle = -A_x \tag{6.72}$$

交换性

$$\langle [A,B],C\rangle = \langle A,[B,C]\rangle, A,B,C \in \tilde{A}_{n-1} \tag{6.73}$$

接着构造一个恰当的函数, 通过其变分计算给出约束条件, 从而获得迹恒等式 (6.68). 但如果 $U,V$ 不是矩阵形式, 迹恒等式对于构造 Hamilton 结构是无效的. 本节为克服其局限性, 给出了可积系统 Hamilton 结构的二次型恒等式.

### 6.5.1 一般的等谱问题

设 $G$ 是一个 $s$ 维的 Lie 代数, 其基为:

$$e_1, e_2, \cdots, e_s, \tag{6.74}$$

相应的 loop 代数 $\tilde{G}$ 为:

$$\begin{aligned} e_i(m) &= e_i\lambda^m, i = 1,2,\cdots,s, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ [e_i(m), e_j(n)] &= [e_i, e_j]\lambda^{m+n} \end{aligned} \tag{6.75}$$

记

$$\partial = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{6.76}$$

其中 $\alpha_i$ 是任意常数,$i = 1,2,\cdots,n$.
对于标量函数 $a$ 或者 $a \in \tilde{G}$.
记

$$a_\partial = \partial a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial a}{\partial x_i} \tag{6.77}$$

利用 $\tilde{G}$ 构造一个不同于 (6.65) 的等谱问题:

$$\begin{cases} \psi_\partial = [U,\psi], U,V,\psi \in \tilde{G} \\ \psi_t = [V,\psi], \lambda_t = 0 \end{cases} \tag{6.78}$$

由相容性条件 $\psi_{\partial t} = \psi_{t\partial}$ 得到零曲率方程

$$U_t - V_\partial + [U, V] = 0 \tag{6.79}$$

对于 $U = U(\lambda, u) = \sum_{i=1}^{s} u_i e_i$ 中的 $\lambda, u_i(i = 1, 2, \cdots, p)$ 定义合适的秩使得秩 $(u_i e_i) = \alpha$ – const.,$1 \leq i \leq s$, 由此我们称 $U$ 是同秩的, 记作:

$$\mathrm{rank}(U) = \mathrm{rank}(\partial) = \mathrm{rank}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \alpha, i = 1, 2, \cdots, n \tag{6.80}$$

令

$$V = \sum_{m \geq 0} V_m \lambda^{-m}, V_m = \sum_{i=1}^{s} V_{mi} e_i \in G \tag{6.81}$$

其中 $V_{mi}$ 是标量函数, 解下面的静态零曲率方程

$$V_\partial = [U, V] \tag{6.82}$$

得到 $V_m$ 之间的递推关系, 再由 (6.79) 式就可得到可积方程族.

假设给定秩 $(V_m)$, 秩 $(V_m \lambda^{-m})$ 是常数, 即

$$\mathrm{rank}(V_m \lambda^{-m}) = \eta - \mathrm{const.}, m \geq 0 \tag{6.83}$$

称 $V$ 是同秩的, 记作

$$\mathrm{rank}(V) = \eta \tag{6.84}$$

设 $V$ 和 $\tilde{V}$ 是方程 (6.82) 的任意两个同秩解, 满足线性关系

$$\tilde{V} = \gamma V, \gamma = \mathrm{const.} \tag{6.85}$$

在下面推导二次型恒等式时将用到 (6.85) 式.

### 6.5.2 二次型恒等式

取前面给出的 loop 代数 $\tilde{G}$

$$a=\sum_{i=1}^{s}a_ie_i,b=\sum_{i=1}^{s}b_ie_i,\in G,[a,b]=\sum_{i=1}^{s}c_ie_i \tag{6.86}$$

其坐标形式为:

$$\begin{aligned}&a=(a_1,a_2,\cdots,a_s)^T,b=(b_1,b_2,\cdots,b_s)^T\\&[a,b]=(c_1,c_2,\cdots,c_s)^T\end{aligned} \tag{6.87}$$

则 $\tilde{G}$ 可表示为

$$\tilde{G}=\{a=(a_1,a_2,\cdots,a_s)^T,a_i=\sum_{i=1}^{s}a_{im}\lambda^m,1\leq i<s\} \tag{6.88}$$

其换位运算为:

$$[a,b]=(c_1,c_2,\cdots,c_s)^T$$

任取 $a,b\in\tilde{G}$, 定义函数 $\{a,b\}$ 为

$$\{a,b\}=a^TFb \tag{6.89}$$

其中 $F$ 是对称的常量矩阵, 即 $F^T=F$.

容易证明 $\{a,b\}$ 满足对称性

$$\{a,b\}=\{b,a\} \tag{6.90}$$

和双线性:

$$\{\alpha_1a_1+\alpha_2a_2,b\}=\alpha_1\{a_1,b\}+\alpha_2\{a_2,b\} \tag{6.91}$$

函数 $\{a,b\}$ 的梯度 $\nabla_b\{a,b\}$ 定义为

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\{a,b+\varepsilon V\}|_{\varepsilon=0}=\{\nabla_b\{a,b\},V\} \tag{6.92}$$

由 (6.91). 很容易计算出

$$\nabla_b\{a,b\} = a \tag{6.93}$$

由 $\partial^* = -\partial$ 得到

$$\nabla_b\{a,b_\partial\} = \nabla_b\{-a_\partial,b\} = -a_\partial \tag{6.94}$$

即根据函数 $\{a,b\}$,(6.72) 中两个式子成立.

如果令

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\{a,b+\varepsilon V\}|_{\varepsilon=0} &= (\nabla_b\{a,b\},V)\\ &= \left(\frac{\delta\{a,b\}}{\delta b},V\right) = \sum_{i=1}^{s}\frac{\delta\{a,b\}}{\delta b_i}V_i\end{aligned} \tag{6.95}$$

则

$$\nabla_b\{a,b\} = Fa, \nabla_b\{a,b_\partial\} = -Fa_\partial \tag{6.96}$$

下面将结合运用方程 (6.93) 和 (6.94) 与 (6.89). 利用函数 (6.69) 可以推得性质 (6.73). 利用函数 $\{a,b\}$,(6.73) 可表示为

$$\{[a,b],c\} = \{a,[b,c]\} \tag{6.97}$$

什么样的对称常量矩阵 $F=(f_{ij})_{s\times s}$ 满足 (6.97) 式?

令

$$[a,b]^T = a^T R(b) = -[b,a]^T = -b^T R(a) \tag{6.98}$$

由于 $[a,b]^T$ 是已知的,$R(b)$ 是一个确定了的 $s\times s$ 矩阵. 方程 (6.97) 可化为

$$a^T R(b)Fc = a^T F(b^T R(c))^T = a^T F(-c^T R(b))^T = a^T(-FR^T(b))c$$

由 $a,c$ 的任意性可得

$$R(b)F = -FR^T(b) = -(R(b)F)^T \tag{6.99}$$

由此得到 $R(b)F$ 是一个反对称矩阵.$F$ 是一个对称常量矩阵.

如果 (6.99) 有一个非零解 $F$, 则 (6.97) 成立, 并且函数 $\{a, b\}$ 拥有性质 (6.70)~(6.73).

令 $u=(u_1, u_2, \cdots, u_p)^T$, $u_i=u_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是光滑标量函数, $f(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 是一个函数, $a_k=a_k(u)$ 是 $u$ 的函数.

为了书写的方便, 令 $m=2$, $a_k=a_k(u)$, $a=(a_1, a_2)^T$, $f(a_1, a_2)=f(a_1(u), a_2(u))=f(u)$.

**命题 6.5.1** 如果 $\nabla_a f=\dfrac{\delta f}{\delta a}=\left(\dfrac{\delta f}{\delta a_1}, \dfrac{\delta f}{\delta a_2}\right)^T=0$, 则

$$\frac{\delta f}{\delta u}=\left(\frac{\delta f}{\delta u_1}, \frac{\delta f}{\delta u_2}, \cdots, \frac{\delta f}{\delta u_p}\right)^T=0 \tag{6.100}$$

**证明** 由 $\nabla_a f$ 的定义得:

$$\nabla_a f=\frac{\delta f}{\delta a}=\left(\frac{\delta f}{\delta a_1}, \frac{\delta f}{\delta a_2}\right)^T$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varepsilon} f(a(u+\varepsilon l))\big|_{\varepsilon=0} &= \left(\frac{\delta f}{\delta u}, l\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\{f(a_1(u+\varepsilon l), a_2(u))+f(a_1(u), a_2(u+\varepsilon l))\}\big|_{\varepsilon=0} \\
&= \sum_{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)} \frac{\partial f}{\partial a_1^{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)}} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} a_1^{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)}(u+\varepsilon l)\big|_{\varepsilon=0} \\
&\quad+\sum_{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)} \frac{\partial f}{\partial a_2^{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)}} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} a_2^{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)}(u+\varepsilon l)\big|_{\varepsilon=0}
\end{aligned}$$

其中

$$a_k^{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)}=\frac{\partial^{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)} a_k}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}, k=1, 2, l=(l_1, l_2, \cdots, l_p)^T$$

因此

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\delta f}{\delta u}, l\right) &= \frac{\delta f}{\delta a_1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon} a_1(u+\varepsilon l)\big|_{\varepsilon=0}+\frac{\delta f}{\delta a_2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon} a_2(u+\varepsilon l)\big|_{\varepsilon=0} \\
&= \sum_{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)} \frac{\delta f}{\delta a_1}\left(\frac{\partial a_1}{\partial u^{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)}}, l^{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)}\right) \\
&\quad+\sum_{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)} \frac{\delta f}{\delta a_2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial u^{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)}}, l^{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)}\right)
\end{aligned}$$

$$= \Big( \sum_{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)} (-1)^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n} \frac{\partial^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n} a_k}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \cdots \partial x_n^{\beta_n}}$$

$$\times \left\{ \frac{\delta f}{\delta a_1} \frac{\partial a_1}{\partial u^{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)}} + \frac{\delta f}{\delta a_2} \frac{\partial a_2}{\partial u^{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)}} \right\}, l \Big) \tag{6.101}$$

其中

$$\frac{\partial a_k}{\partial u^{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)}} = \left( \frac{\partial a_k}{\partial u_1^{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)}}, \frac{\partial a_k}{\partial u_2^{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)}}, \cdots, \frac{\partial a_k}{\partial u_p^{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)}} \right)^T$$

因此, 如果 $\frac{\delta f}{\delta a} = 0$, 则 $\frac{\delta f}{\delta u} = 0$.

引入函数

$$W = \{V, U_\lambda\} + \{\Lambda, V_\partial - [U, \Lambda] = 0\} \tag{6.102}$$

其中 $U, V$ 满足 (6.82). 而 $\Lambda(\in \tilde{G})$ 是待确定的. 由 $W$ 的变分得到下面的约束条件:

$$\nabla_\Lambda W = U_\lambda - \Lambda_\partial + [U, \Lambda] = 0 \tag{6.103}$$

$$\nabla_V W = V_\partial + [U, V] = 0 \tag{6.104}$$

其中 $U$ 是已知的, $V$ 和 $\Lambda$ 是关于 $U$ 的量. 而且有

$$\frac{\delta}{\delta u_i}\{V, U_\lambda\} = \frac{\delta W}{\delta u_i}, i = 1, 2, \cdots, p \tag{6.105}$$

要使得推导计算满足约束条件 (6.103),(6.104) 和命题 (6.100), 在处理上式左端时必须考虑 $U_\lambda$ 和 $V$ 中的 $u_i$, 而右端只需考虑 $U$ 中的 $u_i$ 就行了, 不必考虑 $V$ 和 $\Lambda$ 中的 $u_i$. 因此,

$$\frac{\delta}{\delta u_i}\{V, U_\lambda\} = \frac{\delta W}{\delta u_i} = \left\{V, \frac{\partial U_\lambda}{\partial u_i}\right\} + \left\{[\Lambda, V], \frac{\partial U}{\partial u_i}\right\} \tag{6.106}$$

由 Jacobi 恒等式和方程 (6.103) 和 (6.104) 得

$$\begin{aligned}[][\Lambda, V]_\partial &= [\Lambda_\partial, V] + [\Lambda, V_\partial] = [U_\lambda + [U, \Lambda], V] + [\Lambda, [U, V]] \\ &= [V, [\Lambda, U]] + [\Lambda, [U, V]] + [U_\lambda, V] = [U, [\Lambda, V]] + [U_\lambda, V]\end{aligned} \tag{6.107}$$

由 (6.104) 得

$$V_{\lambda\partial} = [U, V_\lambda] + [U_\lambda, V] \tag{6.108}$$

则

$$[\Lambda, V] - V_\lambda = Z$$

满足

$$Z_\partial = [U, Z]$$

由 (6.85) 和 $\mathrm{rank}(Z) = \mathrm{rank}(V_\lambda) = \mathrm{rank}(\frac{1}{\lambda}V)$, 且 $\frac{1}{\lambda}V$ 是 (6.104) 的一个解, 所以存在一个常数 $\gamma$ 满足

$$[\Lambda, V] - V_\lambda = Z = \frac{\gamma}{\lambda}V \tag{6.109}$$

因此,(6.106) 式可化为

$$\begin{aligned}&\frac{\delta}{\delta u_i}\{V, U_\lambda\} - \left\{V, \frac{\partial U_\lambda}{\partial u_i}\right\} + \left\{V_\lambda, \frac{\partial U_\lambda}{\partial u_i}\right\} + \frac{\gamma}{\lambda}\left\{V, \frac{\partial U_\lambda}{\partial u_i}\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{V, \frac{\partial U_\lambda}{\partial u_i}\right\} + \left(\lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial\lambda}\lambda^\gamma\right)\left\{V, \frac{\partial U_\lambda}{\partial u_i}\right\} \\ &= \lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda^\gamma\left\{V, \frac{\partial U_\lambda}{\partial u_i}\right\}\right), i = 1, 2, \cdots, p\end{aligned} \tag{6.110}$$

上述结论可整理为:

**定理 6.5.1** (二次型恒等式) 若条件 (6.80) 和 (6.85) 成立,$[a, b]^T = a^T R(b)$, 对称矩阵 $F$ 把 $R(b)F$ 变换为反对称矩阵, 则二次型函数 $\{a, b\} = a^T F R(b)$ 有下面的形式:

$$\frac{\delta}{\delta u_i}\{V, U_\lambda\} = \lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda^\gamma\left\{V, \frac{\partial U_\lambda}{\partial u_i}\right\}\right) \quad (i = 1, 2, \cdots, p) \tag{6.111}$$

其中 $\gamma$ 是一个待确定的常数. 则称 (6.111) 式为二次型恒等式.

### 6.5.3 换位算子

设 $V_s=\{b=(b_1,b_2,\cdots,b_s)^T\}$ 是一个 s 维的线性空间,$M_s$ 是一个 $s\times s$ 的矩阵, 在推导 (6.111) 的过程中, 引入算子 $R$:

$$V_s\to M_s: R(b)\in M_s, b\in V_s \tag{6.112}$$

使得算子 $R$ 满足

$$[a,b]^T=a^TR(b) \tag{6.113}$$

由 $[a,b]^T$ 的双线性可知 $R$ 是一个线性算子. 由 $[a,b]^T$ 的反对称性可知

$$a^TR(b)=-b^TR(a) \tag{6.114}$$

由关系式 $\{[a,b],c]\}=\{a,[b,c]\}$ 成立知 $F$ 必须满足

$$R(b)F=\quad FR^T(b) \tag{6.115}$$

我们可以看出 $R$ 的线性和等式 (6.114) 并不能使得 $V_s$ 构成换位运算为 $[a,b]$ 的 Lie 代数.

**定义 6.5.1** 设 $R$ 为从 $V_s\to M_s$ 的线性算子, 且满足

$$R(R^T(b)a)=[R(a),R(b)]=R(a)R(b)-R(b)R(a),\forall a,b\in V_s \tag{6.116}$$

则称 R 是 $V_s$ 上的一个换位算子. 在 $V_s$ 上的所有的换位算子所构成的集合记为 $K(V_s,M_s)$.

**定理 6.5.2** $V_s$ 在换位算子下构成 Lie 代数当且仅当存在 $R\in K(V_s,M_s)$ 使得

$$[a,b]^T=a^TR(b) \tag{6.117}$$

**证明** 设 $[a,b]$ 是 Lie 代数 $V_s$ 上的换位运算, $[a,b]^T=a^TR(b)$. 根据 $[a,b]$ 关于 $b$ 的线性知,$R$ 为从 $V_s\to M_s$ 的线性算子. 由 $[a,b]^T=$

$-[b,a]^T$ 得 $a^TR(b) = -b^TR(a)$, 由 Jacobi 恒等式得

$$\begin{aligned}&[[a,b],c]^T + [[b,c],a]^T + [[c,a],b]^T \\ &\quad = a^TR(b)R(c) + b^TR(c)R(a) + b^TR([a,c]) \\ &\quad = b^T(R(c)R(a) - R(a)R(c) + R([a,c])) = 0, \forall a,b,c \in V_s\end{aligned}$$

由 $b$ 的任意性, 知下式成立

$$R([a,c] = R(a)R(c) \quad R(c)R(a) = [R(a),R(c)] = 0, \forall a,c \in V_s$$

由 $R([a,c] = R(R^T(c)a)$ 得等式 (6.116) 成立. 反之, 对 $\forall R \in K(V_s, M_s)$, 考虑 $V_s$ 上的换位运算

$$[a,b] = R^T(b)a \quad ([a,b]^T = a^TR(b)) \tag{6.118}$$

因为 $R$ 是线性算子和 $[a,b]$ 的双线性, 利用 (6.116) 式得

$$R(R^T(b)a) = -R(R^T(a)b) \tag{6.119}$$

因此,$R^T(b)a = -R^T(a)b$, 即 $[a,b]$ 是反对称的. 条件 (6.116) 保证了由 (6.118) 定义的换位运算满足 Jacobi 恒等式. 所以 $V_s$ 是一个 Lie 代数.

**推论 6.5.1.** 令

$$b = (b_1, b_2, b_3)^T$$

$$R(b) = \begin{pmatrix} \alpha_1 b_2 + \alpha_2 b_3 & \beta_1 b_2 + \beta_2 b_3 & \gamma_1 b_2 + \gamma_2 b_3 \\ -\alpha_1 b_1 + \alpha_3 b_3 & -\beta_1 b_1 + \beta_3 b_3 & -\gamma_1 b_1 + \gamma_3 b_3 \\ -\alpha_2 b_1 - \alpha_3 b_2 & -\beta_2 b_1 - \beta_3 b_2 & -\gamma_2 b_1 - \gamma_3 b_2 \end{pmatrix} \tag{6.120}$$

其中 $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$ 是待确定的常数.
则 $R \in K(V_3, M_3)$ 当且仅当

$$\begin{cases} \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2 = \beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1 \\ \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 = \beta_3\gamma_2 - \beta_2\gamma_3 \\ \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 = \alpha_2\gamma_3 - \alpha_3\gamma_2 \end{cases} \tag{6.121}$$

存在唯一的解 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$. 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 已知. 并设 $\alpha_2+\beta_3\neq 0,\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\neq 0$.

**例 6.5.1**

$$V_3=\tilde{A}_1=\left\{A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{pmatrix}=a_1h+a_2e+a_3f=(a_1,a_2,a_3)^T\right\}$$

$a_k=\sum_m a_{mk}\lambda^m, m=0,\pm1,\pm2,\cdots$

$$\begin{aligned}[A,B]^T&=(AB-BA)^T=(a_2b_3-a_3b_2,2a_1b_2-2a_2b_1,2a_3b_1-2a_1b_3)\\ &=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix} 0 & 2b_2 & -2b_3 \\ b_3 & -2b_1 & 0 \\ -b_2 & 0 & 2b_1 \end{pmatrix}=a^{\mathrm{T}}R(b)\end{aligned} \tag{6.122}$$

其中 $\alpha_1=\alpha_2=0,\alpha_3=1,\beta_1=2,\beta_2=\beta_3=0,\gamma_2=-2,\gamma_1=\gamma_3=0$, $R(b)$ 满足 (6.121) 式.

容易证明

$$F=c\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.123}$$

($c=1$ 时) 满足 $(R(b)F)^{\mathrm{T}}=-R(b)F$.

$$\begin{cases} a=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\leftrightarrow a=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{pmatrix} \\ b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\leftrightarrow b=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & -b_1 \end{pmatrix} \\ \langle A,B\rangle=tr(AB)=2a_1b_1+a_2b_3+a_3b_2 \\ \{a,b\}=a^TFb=2a_1b_1+a_2b_3+a_3b_2,\ \langle A,B\rangle=\{a,b\} \end{cases} \tag{6.124}$$

等式 (6.124) 表明当取 $V_3 = \tilde{A}_1$ 时 (6.111) 和 (6.68) 是完全一致的.

**例 6.5.2**

$V_3 = R_3 = \{a = a_1 i + a_2 j + a_3 k = (a_1, a_2, a_3)^T\}$

在 $R_3$ 中 $a, b$ 的向量积如下:

$$
\begin{aligned}
a \times b &= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)^T
\end{aligned}
$$

显然有

$$
(a \times b)^T = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.125}
$$

其中

$$
R(b) = \begin{pmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.126}
$$

满足 (6.121), 且 $R_3$ 是在换位运算 $[a, b] = a \times b$ 下的 Lie 代数. 因为 $R^T(b) = -R(b)$, 所以可以令 $F = \mathrm{diag}(1, 1, 1)$ 使得

$$
\{a, b\} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{6.127}
$$

**例 6.5.3** 取 loop 代数

$$
V_6 = \{a = (a_1, a_2, \cdots, a_6)^T, a_k = \sum\nolimits_m a_{km} \lambda^m\}
$$

$$
\begin{aligned}
[a, b]^T = (&a_2 a_3 - a_3 a_2, a_3 a_1 - a_1 a_3, a_1 a_2 - a_2 a_1, a_2 a_6 \\
&- a_6 a_2 + a_5 a_3 - a_3 a_5, a_3 a_4 - a_4 a_3 + a_6 a_1 - a_1 a_6, \\
&a_1 a_5 - a_5 a_1 + a_4 a_2 - a_2 a_4)
\end{aligned} \tag{6.128}
$$

$$R(b)=\begin{pmatrix}0&-b_3&b_2&0&-b_6&b_5\\b_3&0&-b_1&b_6&0&-b_4\\-b_2&b_1&0&-b_5&b_4&0\\0&0&0&0&-b_3&b_2\\0&0&0&b_3&0&-b_1\\0&0&0&-b_2&b_1&0\end{pmatrix}\tag{6.129}$$

$$F=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}\tag{6.130}$$

$$\{a,b\}=a^TFb=a_1b_1+a_1b_4+a_4b_1+a_2b_2+a_2b_5+a_5b_2+a_3b_6+a_6b_3+a_3b_3\tag{6.131}$$

$V_6$ 的两个子代数

$$G_1=\{a=(a_1,a_2,a_3,0,0,0)^T\},G_2=\{b=(0,0,0,b_1,b_2,b_3)^T\}$$

满足

$$V_6=G_1\dot{+}G_2,[G_1,G_2]\subset G_2\tag{6.132}$$

可积耦合是孤立子理论中的新的研究课题 [4,5]. 在 $V_6$ 下利用 (6.132) 可以得到许多著名的可积方程族的可积耦合.

### 6.5.4 二次型恒等式的应用

利用 loop 代数 $V_6$ 和函数 (6.131) 可以得到一个方程族.

令

$$U=(\lambda,u_1,u_2,0,u_3,u_4)^T$$

$$\mathrm{rank}(\lambda)=\mathrm{rank}(u_k)=\mathrm{rank}(U)=\mathrm{rank}(\partial)-1, 1\le k\le 4$$

取

$$V=(b^{(1)},b^{(2)},b^{(3)},b^{(4)},b^{(5)},b^{(6)})^T,$$

$$b^{(k)}=\sum\nolimits_{m\ge 0}b_m^{(k)}\lambda^{-m},$$

$k=1,2,\cdots,6$

解下面的方程

$$V_\partial=[U,V] \tag{6.133}$$

得

$$\begin{cases}b_{m\partial}^{(1)}=u_1b_m^{(3)}-u_2b_m^{(2)}, b_{m\partial}^{(2)}=u_2b_m^{(1)}-b_{m+1}^{(3)}\\ b_{m\partial}^{(3)}=b_{m+1}^{(2)}-u_1b_m^{(1)}, b_{m\partial}^{(4)}=u_1b_m^{(6)}-u_4b_m^{(2)}+u_3b_m^{(3)}-u_2b_m^{(5)}\\ b_{m\partial}^{(5)}=-b_{m+1}^{(6)}+u_2b_m^{(4)}+u_4b_m^{(1)}\\ b_{m\partial}^{(6)}=b_{m+1}^{(5)}-u_3b_m^{(1)}-u_1b_m^{(4)}\\ b_1=\beta=\text{const.}, b_0^{(k)}=0, 2\le k\le 6, b_1^{(2)}=\beta u_1, b_1^{(3)}=\beta u_2\\ b_1^{(5)}=\beta u_3, b_1^{(6)}=\beta u_4, b_1^{(1)}=b_1^{(4)}=0, b_2^{(1)}=-\dfrac{\beta}{2}(u_1^2+u_2^2)\\ b_2^{(2)}=\beta u_{2\partial}, b_2^{(3)}=-\beta u_{1\partial}, b_2^{(4)}=-\beta(u_1u_3+u_2u_4)\\ b_2^{(5)}=\beta u_{4\partial}, b_2^{(6)}=-\beta u_{3\partial}, \mathrm{rank}(b_m^{(k)})=m, \mathrm{rank}(V)=0\end{cases} \tag{6.134}$$

记

$V_+^{(n)}=\sum_{m=0}^n\left(b_m^{(1)},b_m^{(2)},b_m^{(3)},b_m^{(4)},b_m^{(5)},b_m^{(6)}\right)^T\lambda^{n-m}$

$V_-^{(n)}=\lambda^nV-V_+^{(n)}$

方程 (6.133) 可化为

$$-V_{+\partial}^{(n)}+[U,V_+^{(n)}]=V_{-\partial}^{(n)}-[U,V^{(n)}]$$

方程左端阶数大于等于零, 而右端阶数小于等于零, 因此

$$-V_{+\partial}^{(n)}+[U,V_+^{(n)}]=-(0,-b_{n+1}^{(3)},b_{n+1}^{(2)},0,-b_{n+1}^{(6)},b_{n+1}^{(5)})^T$$

记 $V^{(n)} = V_+^{(n)}$, 由下面的零曲率方程

$$U_t - V_\partial^{(n)} + [U, V^{(n)}] = 0$$

得到可积系统

$$u_t = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} -b_{n+1}^{(3)} \\ b_{n+1}^{(2)} \\ -b_{n+1}^{(6)} \\ b_{n+1}^{(5)} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n+1}^{(2)} + b_{n+1}^{(5)} \\ b_{n+1}^{(3)} + b_{n+1}^{(6)} \\ b_{n+1}^{(2)} \\ b_{n+1}^{(3)} \end{pmatrix} = JP_{n+1} \tag{6.135}$$

根据二次型恒等式得到

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(b^{(1)}, b^{(4)}\right) = \lambda^{-\gamma}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda^{\gamma}\begin{pmatrix} b^{(2)} + b^{(5)} \\ b^{(3)} + b^{(6)} \\ b^{(2)} \\ b^{(3)} \end{pmatrix}\right) \tag{6.136}$$

比较 $\lambda^{-n-2}$ 的系数得

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(b_{n+2}^{(1)} + b_{n+2}^{(4)}\right) = (\gamma - n - 1)\begin{pmatrix} b_{n+1}^{(2)} + b_{n+1}^{(5)} \\ b_{n+1}^{(3)} + b_{n+1}^{(6)} \\ b_{n+1}^{(2)} \\ b_{n+1}^{(3)} \end{pmatrix} \tag{6.137}$$

取 $n = 0$ 得到 $\gamma = 0$, 因此

$$P_{n+1} = \frac{\delta H_{n+1}}{\delta u}, H_{n+1} = -\frac{b_{n+2}^{(1)} + b_{n+2}^{(4)}}{n+1}, n \geq 0 \tag{6.138}$$

系统 (6.135) 可化为

$$u_t = JP_{n+1} = J\frac{\delta H_{n+1}}{\delta u}, n > 0 \tag{6.139}$$

由 (6.134) 得算子 $L$ 满足

$$JP_{n+1} = P_n \tag{6.140}$$

其中

$$L = \begin{pmatrix} -u_1\partial^{-1}u_2 & \partial + u_1\partial^{-1}u_1 & A & u_3\partial^{-1}u_1 + u_1\partial^{-1}u_3 \\ -\partial - u_2\partial^{-1}u_2 & u_2\partial^{-1}u_1 & B & u_4\partial^{-1}u_1 + u_2\partial^{-1}u_3 \\ 0 & 0 & -u_1\partial^{-1}u_2 & \partial + u_1\partial^{-1}u_1 \\ 0 & 0 & -\partial - u_2\partial^{-1}u_2 & u_2\partial^{-1}u_1 \end{pmatrix}$$

$$A = -u_3\partial^{-1}u_2 - u_1\partial^{-1}u_4, B = -u_4\partial^{-1}u_2 - u_2\partial^{-1}u_4$$

因此 (6.139) 式可化为

$$u_t = JL^n \begin{pmatrix} \beta(u_1 + u_3) \\ \beta(u_2 + u_4) \\ \beta u_1 \\ \beta u_2 \end{pmatrix} = J\frac{\delta H_{n+1}}{\delta u}, n \geq 0 \tag{6.141}$$

易知

$$JL = L^*J \tag{6.142}$$

由 (6.134) 知标量 $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ 与 $u_3, u_4$ 是无关的, 即 (6.135) 式中的前两个方程与 $u_3, u_4$ 无关. 因此可得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_t &= \begin{pmatrix} -b^{(3)}_{n+1} \\ b^{(2)}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{(2)}_{n+1} \\ b^{(3)}_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_1\partial^{-1}u_2 & \partial + u_1\partial^{-1}u_1 \\ -\partial - u_2\partial^{-1}u_2 & u_2\partial^{-1}u_1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \beta u_1 \\ \beta u_2 \end{pmatrix}, \quad (n \geq 0) \end{aligned} \tag{6.143}$$

假设 $u_3 = u_4 = 0$, 令 $b^{(4)} = b^{(5)} = b^{(6)} = 0$. 则系统 (6.141) 可约化为可积系统 (6.143).(6.141) 式中的后两个方程含有 $u_1, u_2$; 因此它

是 (6.143) 的可积耦合系统.(6.143) 与 AKNS 族很类似, 但又不同与 AKNS 族. 因此我们称 (6.143) 为修正的 AKNS 族, 记为 m-AKNS 族. 由等式 (6.142) 知 Hamilton 函数 $H_l(l \geq 1)$ 是彼此对合的, 每一个 $H_l(l \geq 1)$ 都是 (6.141) 的 Hamilton 守恒密度. 因此 (6.141) 是 Liouville 可积的. 由于迹恒等式的不合适所以文献 [7] 中没有得到 m-AKNS-KN 族的 Hamilton 结构, 本节中的二次型恒等式解决了这个问题.

# 参考文献


1 范恩贵. 大连理工大学博士学位论文，1998

2 谷超豪等. 孤立子理论及其应用. 杭州: 浙江科学技术出版社, 1990

3 陈陆君, 梁昌洪. 孤立子理论及其应用. 西安: 西安电子科技出版社, 1997

4 张鸿庆. 力学的代数化、机械化、辛化与几何化. 现代数学与力学, 1997(20)

5 Olver P. J.. Applications of Lie groups to differential equations. Springer, 1986

6 Bluman G. W. and Kumei S. Symmetries and differential equations. Springer. NewYork, 1989

7 张鸿庆, 冯红. 构造弹性力学位移函数的机械化算法. 应用数学和力学, 1995(4):335-344

8 张鸿庆. 变系数偏微分方程组一般解的构造. 计算数学天津会议论文集, 1991

9 张鸿庆, 吴方向. 一类偏微分方程组的一般解及其在壳体理论中的应用. 科学通报, 1993(7)

10 郑宇, 张鸿庆. 固体力学中的 Hamilton 正则表示. 力学学报, 1996(1):119-125

11 张鸿庆. 中国非完整力学三十年. 郑州: 河南大学出版社, 1994

12 张鸿庆, 朝鲁. 算子型 Hilbert 零点定理及构造弹性力学方程组一般解的符号算法. 大连理工大学学报, 1996(4):373-379

13 克莱因. 古今数学思想. 上海: 上海科学技术出版社, 1981

14 Shi H. International workshop Math Mech. International Academic, 1992

15 Shi H. MM-Preprints, 1997:1-11

16 张鸿庆. 弹性力学方程组一般解的统一理论. 大连工学院学报, 1978(18):23-47

17 Li Z. B. and Wang M. L.. J phys A. 1993(26):6027-6031

18 李志斌, 张善卿. 非线性波方程准确孤立波解的符号计算. 数学物理学报, 1997(17):81-89

19 Li Z. B.. MM-Prepints, 1997(15):81-89

20 Li Z. B. and Shi H. Appl.Math-IUC, 1996(11B):1-6

21 Li Z B. Proceedings of Asian Symposium on Computer Mathematics. 1998:153-158

22 Zahhov. E and Shabat A. B.. Soviet Phys. JETP, 1978(48):985-998

23 Miura M. R. Bäcklund transformations. springer-Verlag. Berlin, 1978

24 肖奕. 孤子方程求解的投影矩阵法. 物理学报, 1989(38):1911-1918

25 Bluman G. W. and Kumei S.. J. Math. Phys. , 1988(26):86-96

26 Tian C. Partial Diff. Eqs. 1993(6):284-288

27 Euler N. , Shulga M. W. and Steeb W. H.. J. Phys. A, 1993(26): L307-L313

28 潘秀德. 组合 KdV 方程的孤立波解与相似解. 应用数学和力学, 1988(9):281-285

29 Clarkson P. A. and Mansfield E. L.. Physica D, 1993(70):250-288

30 范恩贵, 张鸿庆. 二类变式 Boussinesq 方程的对称性约化和精确解. 数学物理学报, 1999(19):373-378; 286-292

31 范恩贵. 齐次平衡法、Weiss-Tabor-Carnevale 法及 Clarkson-Kruskal 约化法之间的联系. 物理学报, 2000(49):1409-1412

32 FAN En-Gui. Commun. Theor. Phys. , 2001(35):523-526

33 Pickering A.. J. Phys. A. , 1993(26):4395-4405

34 Lu B. Q. , Pan Z. L. and Jing X. F.. Phys. Lett. A. 1993(180):61-64

35 Kudryashov M. A.. Phys. Lett. A, 1990(147):247-252

36 Tian B. and Gao Y. T.. Phys. Lerr. A. 1990(212):287-293

37 Gardner C. S. , Greene J. M. , Kruskal M. D. and Miura R. M. , Phys. Rev. Lett, 1967(19):1095-1097

38 屠规彰. 拓扑线性空间中的Hamilton算子. 应用数学与计算数学, 1987(2)

39 Zakharov V. E. and Shabat A. B.. Soviet Phys. . 1972(34):62-69

40 李翊神. 一类发展方程和谱的变形. 中国科学 A, 1982(5):385-390

41 Tian C. and Li Y. S.. Chin. Ann. of Math. , 1981(2):11-20

42 赵申琪, 徐宝智. MKdV 方程的反散射解. 高校应用数学学报, 1989(4):398-402

43 屠规彰. Boussinesq 方程的 Backlund 变换与守恒律. 应用数学学报, 1981(4):63-68

44 谷超豪, 胡和生, 周子翔. 孤立子理论中的达布变换及其几何应用. 上海: 上海科学技术出版社, 1999

45 张鸿庆, 范恩贵. 2+1 维 Kadomtsev-Petviashvili 方程的 Backlund 变换和精确解. 大连理工大学学报, 1997(37):624-626

46 范恩贵、张鸿庆. 获得非线性演化方程 Backlund 变换的一种新的途径. 应用数学和力学, 1998(19):603-608

47 陈登远. 孤立子引论. 北京: 科学出版社. 2006

48 Hirota. J. of the Physical Society of Japan. 1981(50):338-342

49 Hirota. J. of the Physical Society of Japan, 1988(57):1901-1904

50 Hirota. J. of the Physical Society of Japan, 1972(33):1459-1463

51 Wahlquist H. D. and Estabrook F. B.. J. Math. Phys. , 1975(16):1-7; 1976(17):1293-1297

52 Morris H. C.. J. of Math. Phys. , 1976(17):1870-1872; 1977(18): 533-636

53 Zhang D. G.. Phys. Lerr A. , 1996(223):436-439

54 张鸿庆, 冯红. 非齐次线性算子方程组一般解的代数构造. 大连理工大学学报. 1994(34):249-255

55 Zhang H. Q. and Feng H.. Proc. of Int. Workshop on Math. Mech. , Beijing, 1992:280-285

56 Wang M. L. and Li Z. B.. Proc. of the 1994 Beijing Symposium on nonlinear evolution equations and infinite dimensional dynamics systems. Zhong shan University Press, 1995:181-185

57 Wang M. L.. Phys. Lett. A, 1995(199):169-172; 1996(213):279-287; Math. Appl. , 1995(8):51-55

58 Wang M. L. , Zhou Y. B. and Li Z. B.. Phys. Lett. A, 1996(216):67-73

59 Li Z. B. and Wang M. L.. Phys. Lett. A, 1993(26):6027-6031; Adv. Math. , 1997(26):129-132

60 王明亮, 李志斌, 周宇斌. 齐次平衡原则及其应用. 兰州大学学报 (自然科学版), 1999(35):8-16

61 李志斌, 张善卿. 非线性波方程准确孤立波解的符号计算. 数学物理学报, 1997(17):81-89

62 Fan En-gui, Zhang Hong-qing. Phys. Lett. A, 1998(246):403-406; Phys. Lett. A, 1998(245):389-392

63 范恩贵, 张鸿庆. 非线性波动方程的孤波解. 物理学报, 1997(46):1254-1258; 非线性孤子方程的齐次平衡法. 物理学报, 1998(47):365-362; 获得非线性演化方程 Backlund 变换的一种新的途径. 应用数学和力学, 1998(19):603-608; Whitham-Broer-Kaup 浅水波方程的 Backlund 变换和精确解. 应用数学和力学, 1998(19):667-670

64 Fan Engui, Zhang Hongqing. Acta Physica Sin(Overseas Edition), 1998(7)

65 Fan Engui, Zhang Hongqing. Commun. Theor. Phys, 1998(30):309-312

66 范恩贵, 张鸿庆. 齐次平衡法若干新的应用. 数学物理学报, 1999(19):373-383

67 Fan Engui. Phys. Lett. A, 2000(265):353-357

68 Yan Z. Y. and Zhang H. Q.. Phys. Lett. A, 1999(252): 382-390

69 Yan Z. Y. , Zhang H. Q. , J. Phys:Gen, 2001(34):1785-1792

70 Yan Z. Y. , Zhang H. Q.. Phys. Lett. A, 2001(285):355-362

71 Zhang Hongqing, Fan Engui. Applications of Mechanical Methods to Partial Differential Equations, 1998

72 贾屹峰. 可积系统与精确解的研究. 硕士毕业论文. 大连理工大学. 2001

73 Lamb G. L.. Math. Phys. 15(1974):2157-2165

74 Gu C. H.. Lett. Math. Phys. , 1986(11):31-40; 325-335

75 Gu C. H. , and Zhou Z. X.. Lett. Math. Phys, 1987(12):179-188

76 谷超豪. Darboux 变换的可逆性, 可换性和周期性. 中国科技大学学报, 1993(23):9-14

77 屠规彰. Boussinesq 方程的 Backlund 变换与守恒律. 应用数学学报, 1981(4):63-68

78 胡星标, 李勇. DJKM 方程的 Backlund 变换及非线性叠加公式. 数学物理学报, 1991(11):164-172

79 Hu X. B. and Li Y. S.. Acta Math. Appl. Sin. , 1988(4):46-54

80 Hu X, B, and Clarkson P. A.. J. Phys. A, 1998(31):1405-1414

81 Hu X. B. and Zhu Z. N.. J. phys. A, 1998(31):4755-4761

82 Whitham G. B.. Pro. Roy, Soc. London, 1965(283A):238-261

83 Miura R. M.. J. Math. Phys. , 1968(9):1202-1204

84 Kruskal M. D.. J. Math. Phys, 1970(11):952-960

85 郭柏灵, 陈登远. 广义 Heisenberg 方程的无穷守恒律. 数学物理学报. 1993(13):298-302

86 顾祝全. 一个 KP 型方程的 Lax 表示、Backlund 变换和无穷守恒律. 科学通报, 1989(34):86-89

87 曾云波. 带附加项的 AKNS 方程族的 Darboux 变换. 数学物理学报. 1995(15):337-345

88 楼森岳等. 变系数 KdV 方程和变系数 MKdV 方程的无穷多守恒律. 物理学报. 1992(41):184-187

89 屠规彰. 秦孟兆. 非线性演化方程的对称性和守恒律之间的关系. 科学通报, 1979(29):913-917

90 Noether E. , Nachr Koning. Mech. Phys.(KI), 1981:235-257

91 Bluman G. W. and Cole J. D.. J. Math. Mech. , 1969(18):1025-1042

92 Bluman G. W. and Cole J. D.. Similarity method for differential equation. Appl. Math. Sci.. Springer-Verlag. New York, 1974(13)

93 Olver P. J.. J. Math. Phys. , 1977(18):1212-1215

94 Olver P. J.. J. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. . 1980(88):71-88

95 Fuchsseiner B. and Fokas A. S.. Physica D, 1981(4):47-66

96 Chen H. H. , Li Y. C. and Lin J. E. . In Advance in Nonlinear Wave. Debnath L. , 1982:233-240

97 李翊神, 朱国城. 一个谱可变演化方程的对称. 科学通报, 1986(19):1449-1453

98 田畴. Burgers 方程的新的强对称、对称和李代数. 中国科学 A, 1987(30):1009-1018

99 Zhu G. C. and Chen H. H.. J. Math. Phys. . 1989(27):2201-2213

100 Clarkson P. A. and Kruskal M. D.. J. Math. Phys. , 1989(30):2201-2213

101 Nucci M. C. and Winternitz P.. Physica D, 1991(49):257-272

102 Lou S. Y. etc. J. Phys. A, 1991(24):1455-1467

103 Lou S. Y.. Sci. China A, 1991(34):1098-1108

104 Lou S. Y.. J. Phys. A. 1993(26). 4387-4394; 1994(27):3235-3243

105 Han P. and Lou S. Y.. Commun. Theor. Phys. , 1994(222):437-442

106 楼森岳, 俞军. 2 + 1 维双线性 Sawada − Kotera 方程的对称结构. 物理学报, 1994(43):1050-1055

107 林机, 俞军、楼森岳. 具有无穷维 Virasoro 型对称代数的 (3+1) 维可积模型. 物理学报, 1996(45):1073-1080

108 张鸿庆, 范恩贵. 非线性耦合标量场方程的精确解. 非线性动力学学报, 1998(5):236-239

109 范恩贵. 齐次平衡法、Weiss-Tabor-Carnevale 法及 Clarkson-Kruskal 约化法之间的联系. 物理学报, 2000(49): 1409-1412

110 闫振亚, 张鸿庆. 具有阻尼项的非线性波动方程的相似约化. 物理学报, 2000(49): 2113-2117

111 李继彬, 赵晓华, 刘正荣. 广义哈密顿系统理论及其应用. 北京: 科学出版社, 1994

112 Arnold V. I.. Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer-Verlag. New York. Heidelberg Berlin, 1978

113 Drinfeld V. G. and Sokolov V. V.. Lie algebras and equations of KdV type. Preprint, 1983

114 Gu C. H. and Hu H. S.. Scientia Sinica, 1986(29):704-719

115 曹策问. 保谱方程的换位表示. 科学通报, 1989(34):330-338

116 马文秀. 伴随于可积系 Lax 表示的 Lax 算子代数. 科学通报, 1990(35):1843-1846; 杨族可积发展方程的换位表示. 科学通报, 1993(38):1543-1547

117 Ma W. X.. J. Phys. A, 1993(26):2573-2582; 1992(25):L719-L726

118 乔志军. Levi 族的 Lax 表示. 科学通报, 1990(35):1553-1554; WKI 族的换位表示. 科学通报, 1992(37):763-764; 三族保谱方程的换位表示. 数学年刊, 1993(14A):31-38

119 Moser J.. Advances in Math. , 1975(16):197-220

120 曹策问. AKNS 族的 Lax 方程组的非线性化. 中国科学 A, 1989(32):701-707

121 曹策问, 耿献国. Bargmann 系统与耦合 Harry-Dym 方程解的对合表示. 数学学报, 1992(35):314-322

122 Geng X. G.. J. Math. Phys. , 1993(34):807-817

123 Cao C. W.. Acta Math. Sine. New Series, 1991(7):216-223

124 Cao C. W. and Geng X. G.. J. phys. A, 1991(23):4117-4125

125 徐西祥. Levi 方程的非线性化. 数学物理学报, 1999(19):505-511

126 Zeng Y. B.. J. Math. Phys. L273-L278; Physica D, 1994(73):171-188

127 Zeng Y. B. and Li Y. S.. J. Math. Phys. , 1989(30):1679-1689; Acta Math. Sin. New Series, 1996(12):217-224

128 曾云波, 李翊神. 数学进展, 1995(24):118-130

129 Tu G. Z.. J. Math. Phys. , 1989(30):330-338; J. Phys. A, 1989(22):2375-2492; 1990(23):2903-3922

130 马文秀. 一个新的 Liouville 可积的广义 Hamilton 方程族及其约化. 数学年刊, 1992(13A):115-123

131 Tu G. Z. and Meng D. z.. Acta. Math. Appl. Sin. , 1989(5):89-96

132 Tu G. Z. and Hu X. B.. Chin. Ann. of Math. , 1997(17B). 497-506

133 Fan En-gui. J. Phys. A, 2001(34):513-519; 2000(274)

134 范恩贵, 张鸿庆. 一个新的 Liouville 可积系统及其 Lax 表示, Bi-Hamilton 结构. 应用数学和力学, 2001(22):458-464

135 Hu X. B.. J. Phys. A, 1997(30):619-632

136 郭福奎. 可积的与 Hamilton 形式的 NLS-MKdV 方程族. 数学学报, 1997(40); 一类 Lie 代数. 山东科技大学学报, 2003(22):87-88

137 郭福奎. Loop 代数的子代数与可积 Hamilton 方程族. 数学物理学报, 1999(19):507-513; 一族可积 Hamilton 方程. 应用数学学报, 2000(23):181-187

138 Fuchssteiner B.. Applications of Analytic and Geometric Methods to Nonlinear Differential Equations, 1993:125-138

139 Ma W. X. and B. Fuchssteiner. Chaos. Solitons & Fractals, 1996 (7) : 1227

140 张玉峰, 张鸿庆. 组合 KdV 与 MKdV 方程 Backlund 变换及其一类精确解. 大连理工大学学报, 2001(41):392-395

141 Zhang Y. F. and Zhang H. Q.. Commun. Theor. Phys. , 2002

142 Tam H. W. Ma W. X. and Hu X. B.. J. phys. Soc. Jpn, 2000(69):45

143 张卫国, 马文秀. 广义 Pochhammer-Chree 方程的显式精确孤波解. 应用数学和力学, 1999(20):625-632

144 尚亚东. 二维 RLW 方程和二维 SRLW 方程的显式精确解. 应用数学, 1992(12):6-8

145 余扬政, 冯承天. 物理学中的几何方法. 北京: 高等教育出版社, 1998

146 李翊神. 一个特征值问题的达布变换. 应用数学学报, 1996(9):196-200

147 张玉峰, 张鸿庆. 一族 Liouville 可积系及其双约束流的 Hamilton 系统. 工程数学学报. 2001(18): 93-97

148 张鄂堂等. 一类矩阵发展方程. 中国科学技术大学学报 (数学专辑), 1983

149 Li Y. s. etc. Acta Math. Sinica. New Series, 1987(3):143-151

150 董焕河, 张玉峰等. 演化方程的 Darboux 变换的一类求法. 工科数学, 2002(3): 76-78

151 张鸿庆, 张玉峰. Benjamin 方程的 Backlund 变换、非线性叠加公式及无穷守恒律. 应用数学和力学, 2001(22):1127 — 1131

152 Weiss. J. Math. Phys. , 1983(24):522-536; 1985(26):258-269

153 李志斌. 数学机械化与微分方程的对称群计算. 数学机械化高级研讨班资料系列讲座之一, 1999

154 Zhang Yufeng and Zhang Hongqing. Chinese Phys. , 2002(11): 319-322

155 张玉峰, 张鸿庆. 广义热传导方程族及其 Hamilton 结构. 南京航空航天大学学报, 2001(33): 325-328

156 张玉峰, 张鸿庆. 一族 Liouville 可积系及其约束流的 Lax 表示、Darboux 变换. 应用数学和力学, 2002(4): 81-85

157 张玉峰等. 一个新的 loop 代数及其应用. 甘肃工业大学学报, 2001(27): 91-93

158 张玉峰, 张鸿庆. 一个类似于 KN 族的可积系及其可积耦合. 数学研究与评论, 2002(2): 289-294

159 Zhang Yufeng and Zhang Hongqing. J. Math. Phys. , 2002(43): 466-472

160 张玉峰, 张鸿庆. 广义 AKNS 可积族的可积耦合. 中南工业大学学报, 2002(3): 220-223

161 张玉峰, 张鸿庆. 一个新的 loop 代数及其应用. 高校应用数学学报, 2002(17): 313-317

162 Zhang Yufeng and Zhang Hongqing. Phys. Lett. A , 2002(299): 543-548

163 张玉峰, 张鸿庆. Boussinesq 方程的 Backlund 变换及相似约化. 南京航空航天大学学报, 2000(17): 199-202

164 Zhang Yufeng and Zhang Hongqing. Phys. Lett. A. International Academic, 2003(317):280-286

165 范恩贵. 可积系统与计算机代数. 北京: 科学出版社, 2004

166 张玉峰. 一个 Lie 代数的子代数及其相关的两类 Loop 代数. 数学学报, 2005(1): 141-152

167 Fukui Guo, Yufeng Zhang. J. Phys. A. 2005(38):8537-8548

168 张玉峰. 推广的一类 Lie 代数及其相关的 族可积系统. 物理学报, 2004(5):1176-1279

169 董焕河. 广义 KN 方程族及其 Hamilton 结构. 大学数学, 2005(21):69-73

170 Dong Huanhe, Zhang Ning. Commun. Theor. Phys, 2005(6):997-1001

171 Dong huanhe. J. of far east dynamics systems, 2005(7):153-160

# 附录：数学物理中常见非线性方程

[1] Aceive dispersive-dissipative equation

$$u_t + uu_x + u_{xx} + \alpha u_{3x} + u_{4x} = 0$$

[2] Belousov-Zhabotinskii reaction-diffusion equation

$$\begin{aligned} &u_t - u_{xx} = u(1 - u - \alpha v) \\ &v_t - v_{xx} = -\beta uv \end{aligned}$$

[3] Benjamin equation

$$u_{tt} + \beta(u^2)_{xx} + \alpha u_{xxxx} = 0$$

[4] Benjamin Bona Mahony(BBM) equation

$$u_t + u_x + uu_x + \alpha u_{xxt} = 0$$

[5] Benjamin Bona Mahony(BBM)-Burgers equation

$$u_t + u_x + uu_x - \alpha u_{xx} - \beta u_{xxt} = 0$$

[6] Benjamin-Ono(BO) equation

$$u_t + 2uu_x + Hu_{xx} = 0$$

where $Hu$ is the Hilbert transform $(Hf)(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{f(y)}{y - x}\mathrm{d}y$

[7] Born-Infeld equation

$$(1 + u_x^2)u_{tt} - 2u_t u_x u_{xt} - (1 - u_t^2)u_{xx} = 0$$

[8] Boussinesq equation

$$u_{tt} + \alpha u_{xx} + \beta(u^2)_{xx} + \gamma u_{4x} = 0$$

[9] (2+1)-dimensional Boussinesq equation

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} - (u^2)_{xx} - u_{xxxx} = 0$$

[10] Bretherton equation

$$u_{tt} + u_{xx} + \alpha u_{4x} - \beta u^3 = 0$$

[11] Burgers equation

$$u_t + uu_x - u_{xx} = 0$$

[12] (2+1)-dimensional Burgers equation

$$(u_t + uu_x - u_{xx})_x + u_{yy} = 0$$

[13] Burgers-huxleyf equation

$$u_t + \alpha uu_x - u_{xx} = \beta u(1 - u)(u - \gamma)$$

[14] Calogero-Degasperis-Fokas(CDF) equation

$$u_t - u_{xxx} + v_x^3 - (ae^u + be^{-u} + c)v_x = 0$$

[15] Chaffee-Infantey equation

$$u_t - u_{xx} = \alpha u(1 - u^2)$$

[16] Chen-Lee-Liu equation

$$iu_t + u_{xx} + i\,|u|^2\,u_x = 0$$

[17] Coupled Korteweg-de Vries(KdV)equation

$$
\begin{aligned}
&u_t + 6\alpha u u_x - v v_x + \beta u_{xxx} = 0 \\
&v_t + 3\alpha u v_x + \alpha v_{xxx} = 0
\end{aligned}
$$

[18] (2+1)-dimensional Coupled nonlinear Schrodingger equation

$$
\begin{aligned}
&i u_t - u_{xy} - v\,|u|\,u = 0 \\
&v_t - 2\,|u|_x^2 = 0
\end{aligned}
$$

[19] Coupled Non-Linear Schrodinger(NLS)equation

$$
i u_t + u_{xx} + 2(|u|^2 \pm |v|^2)u = 0
$$

$$
i v_t \pm v_{xx} + 2(|v|^2 \pm |u|^2)v = 0
$$

[20] Coupled Schrodinger-Boussinesq equation

$$
\begin{aligned}
&i u_t = u_{xx} + u v \\
&v_{tt} - v_{xx} - (v^2)_{xx} - v_{xxxx} + (|u|^2)_x = 0
\end{aligned}
$$

[21] Cylindrical Korteweg-de Vries(KdV))equation

$$
u_t + u_{xxx} + 6 u u_x + \frac{1}{2t} u = 0
$$

[22] Cylindrical Kadomtsev-Petviashvili(KdV))equation

$$
(u_t + u_{xxx} + 6 u u_x)_x + \frac{1}{2t} u_x \pm \frac{1}{t^2} u_{yy} = 0
$$

[23] Cylindrical Non-Linear Schrodinger(NLS)equation

$$
i u_t + \frac{i}{2t} u + u_{xx} \pm 2\,|u|^2\,u = 0
$$

[24] Dodd-Bullough-Mikhailov equation

$$u_{xt} + pe^{u} + qe^{-2u} = 0$$

[25] Davey-Stewartson(DS)equation

$$iu_t + \frac{1}{2}\sigma^2(u_{xx} + \sigma^2 u_{yy}) + \alpha |u|^2 u - uv = 0$$

$$v_{xx} - \sigma^2 v_{yy} - 2\alpha(|u|^2)_{xx} = 0, \quad \sigma^2 = \pm 1$$

$\sigma = 1$(DSI)is the hyperbolic case;
$\sigma = i$(DSI)is the elliptic case

[26] Deformation Boussinesq equation 1

$$u_t + v_x + uu_x = 0$$
$$v_t + (uv_x) + u_{xxx} = 0$$

[27] Deformation Boussinesq equation 2

$$u_t + v_x + (uv_x) - 3\alpha v_{xxx} = 0$$
$$v_t + uv_x + u_x - 3\alpha v_{xxt} = 0$$

[28] Deformation Boussinesq equation 3

$$u_t + v_x + uu_x + \alpha u_{xxx} + \beta u_{xxt} = 0$$
$$v_t + (uv)_x + 2v_x + \beta u_{xxx} = 0$$

[29] Derivative Nonlinear Schrodinger(DNLS)equation

$$iu_t - u_{xx} + i\alpha(|u|^2 u^*)_x = 0$$

[30] Discrete Korteweg-de Vries(KdV)equation

$$u_{nt} = \exp(u_{n+1}) - \exp(u_{n-1})$$

[31] Discrete Modified Korteweg-de Vries(KdV)equation

$$u_{nt} = (1 + h^2 u_n^2)(u_{n+1} - u_{n-1})$$

[32] Discrete Sine-Gordon equation

$$u_{n+1t} - u_{nt} = \sin(u_{n+1} + u_n)$$

[33] Dispersive Long-wave equation

$$\begin{aligned} u_t &= -\eta_x - u u_x \\ \eta_t &= -(u\eta + u + u_{xx})_x \end{aligned}$$

[34] Dissipation diffusion equation

$$u_t + u u_x + \alpha u_{xxx} - (u_t + \beta u u_x)_x = 0$$

[35] (2+1)-dimensional dissipative long water wave equation

$$\begin{aligned} & u_{yt} + v_{xx} + \frac{1}{2}(u^2)_{xy} = 0 \\ & v_t + (uv + u_{xy})_x = 0 \end{aligned}$$

[36] Double Sine-Gordon equation

$$u_{xt} = \sin(u) + \sin(2u)$$

[37] Drinfel-Sokolov-Wilson(DSW) equation

$$\begin{aligned} & u_t + v v_x = 0 \\ & v_t - \alpha u v_x + \beta u v_x + \gamma u_{xxx} = 0 \end{aligned}$$

[38] Eckhaus equation

$$i u_t + u_{xx} + 2(|u|^2)_x u + |u|^4 u = 0$$

[39] Fitzhugh-Nagumo equation

$$u_t - u_{xx} = u(u-\alpha)(1-u)$$

[40] Fisher equation

$$u_t - u_{xx} = u(1-u)$$

[41] FG equation

$$u_t = u_{5x} - \frac{5}{16}(8u_{xx}^2 + 8u_x u_{xxx} + 16uu_x u_{xx} + 4u^3 u_{xxx} + 4u^3 u_x \; u^4 u_x)$$

[42] Generalized Burgers- Fisher equation

$$u_t - u_{xx} - \alpha u^c u_x = \beta u(1-u^c)$$

[43] Generalized Derivative Nonlinear Schrodinger(DNLS)equation

$$iu_t - u_{xx} + i\alpha |u|^2 u_x + i\beta u^2 u_x^* + \gamma |u|^4 u = 0$$

[44] Generalized Kolmogorov Petrovsk Piskunov(KPP) equation

$$u_t - u_{xx} + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 = 0$$

[45] Generalized Fisher equation

$$u_t - u_{xx} - \alpha u^{-1}(u_x)^2 = u(1-u^c)$$

[46] Generalized Korteweg-de Vries(KdV)equation

$$u_t + (\alpha + \beta u^r)u^r u_x + \delta u_{xxx} = 0$$

[47] Generalized Schrodinger equation

$$iq_t - \frac{s}{2}q_{xx} + |q|^2 q - i\lambda q_{xxxx} + iu(|q|^2 q)_x + ivq(|q|^2)_x = 0$$

[48] Generalized Sine-Gordon(GSG)equation

$$u_{tt} - u_{xx} = k \sin u$$

[49] Gerdjikov-ivanov equation

$$iu_t + u_{xx} + iu^2 u_x^* + \frac{1}{2} |u|^4 u^* = 0$$

[50] Harry-Dym equation

$$u_t + u^3 u_{xxx} = 0$$

[51] (2+1)-dimensional Harry-Dym equation

$$u_t + u^3 u_{xxx} + \frac{3}{u}(u^2 \partial_x^{-1}(\frac{u_y}{u^2}))_y = 0$$

[52] Heisenberg equation

$$\begin{aligned} u_t &= i(uw_{xx} - wu_{xx}) \\ v_t &= i(wv_{xx} - vw_{xx}) \\ w_t &= \frac{i}{2}(vu_{xx} - uv_{xx}) \end{aligned}$$

[53] Hirota equation

$$u_t - u_{xxt} + \alpha u_x(1 - u_t) = 0$$

[54] Hirota equation

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u + 6i\alpha |u|^2 u_x + i\alpha u_{xxx} = 0$$

[55] Huxley equation

$$u_t - u_{xx} = u^2(1 - u)$$

[56] Intermediate Kadomtsev-Petviashvili (IKP )equation

$$(u_t + uu_x + u_{xxx})_x + \alpha^2 u_{yy} = 0$$

[57] Joseph-Egri equation

$$u_t + u_x + uu_x + \beta u_{xtt} = 0$$

[58] Kadomtsev-Petviashvili (KP)equation

$$(u_t + uu_x + u_{xxx})_x + \alpha^2 u_{yy} = 0.$$

$\alpha^2 = -1$,(KPI equation); $\alpha^2 = 1$, (KPII equation)

[59] (2+1)-dimensional Kadomtsev-Petviashvili(KP) equation

$$q_t = \frac{1}{8}(q_{xxx} - 6q^2 q_x + 6q_x\partial^{-1}q_y + 3\partial^{-1}q_{yy})$$
$$p_t = \frac{1}{8}(p_{xxx} - 6pp_x + 3\partial^{-1}q_{yy}) + \frac{3}{4}(pq_x - pq^2 + p\partial^{-1}q_y)_x$$

[60] Kaup-Newell equation

$$iu_t + u_{xx} + i(|u|^2 u)_x = 0$$

[61] Kawachara equation

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xxx} + \beta u_{5x} = 0$$

[62] Klein-Gordon equation

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u + \beta u^3 = 0$$

[63] Konopelchenko-Dubrovsky equation

$$u_t - u_{xxx} - 6\beta uu_x + \frac{3}{2}\alpha^2 u^2 u_x - 3w_y + 3\alpha u_x w = 0$$
$$w_x = u_y$$

[64] KdV-MKdV equation

$$u_t + (\alpha + \beta u)uu_x + \gamma u_{xxx} = 0$$

[65] Korteweg-de Vries(KdV) equation

$$u_t + 6uu_x - u_{xxx} = 0$$

[66] Korteweg-de Vries(KdV)-Burgers equation

$$u_t + uu_x - \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0$$

[67] Korteweg-de Vries(KdV)-Burgers-Kuramoto equation

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + \gamma u_{xxxx} = 0$$

[68] (2+1) dimensional Korteweg-de Vries(KdV)-Burgers equation

$$(u_t + uu_x + \alpha u_{xxx} - \beta u_{xx})_x + \gamma u_{yy} = 0$$

[69] Kundu equation

$$iu_t + u_{xx} - 2i(2\alpha - 1)|u|^2 u_x - i(4\alpha - 1)u^2 u_x^* + \alpha(4\alpha - 1)|u|^4 u = 0$$

[70] Kuramoto-Sivashinsky equation

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xx} - \beta u_{4x} = 0$$

[71] Landou-Ginburg-Higgss equation

$$u_{tt} - u_{xx} - m^2 u + g^2 u^3 = 0$$

[72] Liouville equation

$$u_{xt} = e^u$$

[73] Long water wave equation

$$u_t - uu_x - v_x + \frac{1}{2}u_{xx} = 0$$
$$v_t - (uv)_x - \frac{1}{2}v_{xx} = 0$$

[74] Mixed Schrodinger equation

$$iu_t - u_{xx} + i\beta(u^2u^*)_x + \gamma u^2u^* = 0$$

[75] Modified Kadomtsev-Petviashvili(MKP) equation

$$u_t - u_{xxx} + 6u^2u_x + 3\sigma^2\partial^{-1}u_{yy} + u_{yy} = 0$$

[76] Modified Kawachara equation

$$u_t + u_x + u^2u_x + \alpha u_{3x} + \beta u_{5x} = 0$$

[77] Modified Benjamin Bona Mahony (BBM) equation

$$u_t + u_x + u^2u_x + \alpha u_{xxt} = 0$$

[78] Modified Boussinesq equation

$$u_{tt} + \alpha u_t u_{xx} + \beta u_x u_{xt} - \frac{1}{2}\alpha(\alpha+\beta)u_x^2u_{xx} + u_{xxxx} = 0$$

[79] Modified c-Korteweg-de Vries(KdV)equation

$$u_t = v_x - \frac{3}{2}uu_x + \beta u_x$$
$$v_t = \frac{1}{4}u_{xxx} - vu_x - \frac{1}{2}uv_x + \beta v_x$$

[80] Modified Korteweg-de Vries(KdV)-Burgers equation

$$u_t + u^2u_x - \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0$$

[81] Modified Korteweg-de Vries(KdV)equation

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0$$

[82] Modified Korteweg-de Vries(KdV)equation

$$u_t + \alpha(|u|^2 u)_x + \beta u_{xxx} = 0$$

[83] Modified Volterra equation

$$u_t + \alpha u - u + uv_x = 0$$
$$v_t + \beta v_x + v - uv = 0$$

[84] Monger-Ampere equation

$$u_{tt} + u_{xx} - u_{tx}^2 = -k, \ k = \pm 1, 0$$

[85] Nonlinear heat conduction equation

$$u_t - (u^2)_{xx} = \alpha u - \beta u^2$$

[86] Nonlinear Telegraph equation

$$u_{tt} - u_{xx} + u_t + \alpha u + \beta u^3 = 0$$

[87] Nepomnyachtchyi equation

$$u_t + \alpha u_{xx} + \beta u_{4x} - 2\beta v^{-2}(u^3)_{xx} + \gamma u u_x + \delta u = 0$$

[88] Newell-Whitehead equation

$$u_t - u_{xx} = u - u^3$$

[89] Poisson equation

$$u_{tt} + 2u_x u_{xx} - (1 - u_x^2)u_{xx} = 0$$

[90] Reaction-diffusion equation

$$u_t = (u^2)_{xx} + u(u-1)(\alpha - u)$$

[91] Reaction-diffusion equation 1

$$u_t - \alpha u_{xx} = uv$$
$$v_t - \alpha v_x = -uv$$

[92] Reaction-diffusion equation 2

$$u_t - \alpha u_{xx} = u^2 v - \beta u$$
$$v_t - \alpha v_x = -u^2 v + \beta u$$

[93] Regularized long-wave (RLW)-Burgers equation

$$u_t + u_x + 12uu_x - \alpha u_{xx} - \beta u_{xxt} = 0$$

[94] Self-dual Lattice equation

$$u_{nt} = (1 \pm u_n^2)(u_n - u_{n-1})$$
$$v_{nt} = (1 \pm v_n^2)(u_{n+1} - u_{n-1})$$

[95] Shallow Water Wave equation

$$u_t - uu_{xxt} - 4uu_t - 2u_x \partial_x^{-1} u_t + u_x = 0$$

[96] Sharma-Tasso-Olever equation

$$u_t + 3\alpha u_x^2 + uu_x + 3\alpha u^2 u_x + 3\alpha uu_{xx} + \alpha u_{xxx} = 0$$

[97] Sine Gordon equation

$$u_{xt} = \sin u$$

[98] Sinh-Gordon equation

$$u_{xt} = \sinh u$$

[99] Supersymmetric Korteweg-de Vries(SKdV) equation

$$u_t - \frac{1}{4}(u_{xxx} + 6uu_x + 12vv_{xx}) = 0$$
$$v_t - \frac{1}{4}(4v_{xxx} + 6uv_x + 3u_x v) = 0$$

[100] Symmetric Regularized Wave equation

$$u_{tt} + \alpha u_{xx} + \beta(u^2)_{xt} + \gamma u_{xxtt} = 0$$

[101] Rupture soliton equation

$$(u_{xt} - 4u_x u_{xy} - 2u_y u_{xx} - u_{xxxy})_x = 0$$

[102] Toda Lattice

$$u_{ntt} = \exp\{-(u_n - u_{n-1})\} - \exp\{(u_{n+1} - u_n)\}$$

[103] 2-dimensional Toda Lattice

$$Q_{nxy} = \exp(Q_{n-1} - Q_n) - \exp(Q_n - Q_{n+1})$$

[104] Volterrage Lattice

$$u_t(n) = u(n)(u(n-1) - u(n+1))$$

[105] Whitham-Broer-Kaup Shallow water wave equation

$$u_t + uu_x + v_x + \alpha u_{xx} = 0$$
$$v_t + (uv)_x - \alpha v_{xx} + \beta v_{xxx} = 0$$

[106] Zhiber-Shabaut equation

$$u_{xt} + pe^u + qe^{-u} + re^{-2u} = 0, p \neq 0$$

[General Information]
□□=□□□□□□□□□□
□□=□□□□□□□□
□□=273
SS□=11857874
DX□=
□□□□=2006.7
□□□=□□□□□□□□□